

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

В.С.ГУТНИКОВ

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ



Ленинград
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
Ленинградское отделение

1990

ББК 31.22

Г93

УДК 681.518.3.08

Рецензент И. А. Карабанов

Редактор Ю. В. Долгополова

Гутников В. С.

Г93 Фильтрация измерительных сигналов.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990.— 192 с.: ил.
ISBN 5-283-04482-5

Рассмотрены основы теории фильтрации, типы фильтров, методы их расчета и реализации. Кратко описаны активные фильтры на основе операционных усилителей, программные и аппаратные цифровые фильтры. Изложены методы синтеза и воспроизведения специальных весовых функций, позволяющих повысить помехозащищенность современных автоматических средств измерения. Приведены конкретные примеры расчета и реализации типовых фильтров.

Для инженерно-технических и научных работников, занятых разработкой и эксплуатацией измерительной аппаратуры, может быть полезна студентам вузов.

Г $\frac{2202030000-127}{051(01)-90}$ 57—90

ББК 31.22

ISBN 5-283-04482-5

© В. С. Гутников, 1990

Фильтрация представляет собой одну из самых распространенных операций обработки сигналов. Цель фильтрации состоит в подавлении помех, содержащихся в сигнале, или в выделении отдельных составляющих сигнала, соответствующих тем или иным свойствам исследуемого процесса.

В электрических и электронных измерительных устройствах уже давно находят применение различные типы *RLC*-фильтров. С появлением доступных и дешевых интегральных операционных усилителей получили широкое распространение активные фильтры. Теория этих фильтров разработана достаточно хорошо, сформулированы четкие рекомендации по их расчету и проектированию. Прогресс в развитии цифровых интегральных схем, повсеместное применение микропроцессоров для цифровой обработки измерительной информации обусловили интерес разработчиков измерительной аппаратуры к цифровым фильтрам. Теория этих фильтров сформировалась относительно недавно, вопросам их анализа и синтеза посвящено большое число книг, в которых неискушенному читателю разобраться подчас весьма не просто.

Активные фильтры и цифровые фильтры — это устройства, которые используются в различных областях техники. В последние десятилетия интенсивно развивались также методы фильтрации, специфичные именно для измерительной техники. Это методы, основанные на реализации специальных весовых функций. Получаемые при этом фильтры очень близки по своим свойствам к цифровым фильтрам, но могут быть установлены как в цифровой, так и в аналоговой части средства измерения. В последнем случае

могут быть получены некоторые преимущества в сравнении с цифровой фильтрацией: отсутствие погрешности квантования, сокращение части измерительного канала, для которой необходимо предусматривать расширенный диапазон изменения сигнала, учитывающий возможную помеху.

Первоначальный замысел данной книги предполагал изложение материала, относящегося лишь к синтезу и воспроизведению специальных помехоподавляющих весовых функций (эти методы фильтрации в настоящее время описаны преимущественно в журнальных статьях и диссертациях). Однако по предложению издательства решено было написать книгу, в которой бы с единых позиций были рассмотрены все основные типы фильтров, применяемых в измерительной технике.

Поскольку фильтрация сигнала заключается в целенаправленном изменении соотношения между различными компонентами спектра сигнала, то первые четыре главы книги посвящены теории спектров. Далее, в пятой главе, рассматриваются общие вопросы, относящиеся к воздействию фильтра на обрабатываемый сигнал. Шестая глава книги посвящена краткому изложению методов проектирования активных фильтров. После этого описываются методы фильтрации, основанные на реализации специальных весовых функций, и затем излагаются общие методы проектирования цифровых фильтров.

Объем книги невелик. Поэтому естественно, что в нее не вошли многие разделы, относящиеся к особенностям различных методов фильтрации. По этой же причине в книге часто отсутствуют полные и строгие выводы сложных математических соотношений. Автор старался излагать материал так, чтобы он был доступен студенту старшего курса института или инженеру, в практической деятельности которого встречаются задачи в области обработки измерительных сигналов. Хотя книга и носит более прикладной, чем теоретический характер, вместе с тем она содержит много математических выкладок. Это объясняется как спецификой рассматриваемых вопросов, так и тем, что современному специалисту для понимания физического принципа действия соответствующего устройства часто требуется первоначально осознать те тео-

ретические зависимости, которые положены в его основу.

Значительная часть материала книги неоригинальна. Здесь автор пытался кратко, понятно и последовательно изложить вопросы, которые уже рассмотрены в солидных монографиях и учебниках. В части, касающейся подавления помех в измерительных устройствах, имеются результаты, полученные автором и научным коллективом, работающим под его руководством.

Автор отдает себе отчет в том, что в книге возможны различные неточности, и будет благодарен всем, кто поможет их устранению. В этом плане большая работа уже проделана доцентом И. А. Карабаевым, которому автор искренне признателен за тщательность и благожелательность, проявленные при рецензировании книги.

Отзывы о книге, замечания и пожелания просим направлять в адрес издательства: 191065, Ленинград, Марсово поле, 1, Ленинградское отделение Энергоатомиздата.

Автор

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1. РЯД ФУРЬЕ

Всякая периодическая функция $\varphi_p(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t}, \quad (1)$$

где $f_1 = 1/T_1$; T_1 — период функции $\varphi_p(t)$; C_k — постоянные коэффициенты.

Условия Дирихле означают, что функция должна быть ограниченной, кусочно-непрерывной и иметь на протяжении периода конечное число экстремумов.

В качестве базовых функций, т. е. функций, по которым проводится разложение, в (1) использованы комплексные гармонические функции вида $e^{j2\pi k f_1 t}$, где k — целочисленный параметр. Эти функции ортогональны на промежутке $T_1 = 1/f_1$, соответственно интеграл на этом промежутке от произведения двух функций с параметрами $k = n$ и $k = -m$ равен нулю при $n \neq m$. В этом нетрудно убедиться:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{j2\pi n f_1 t} e^{-j2\pi m f_1 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ T_1 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь t_0 — некоторое начальное значение аргумента t .

Значения коэффициентов C_k ряда (1) можно найти, если обе части равенства (1) домножить на $e^{-j2\pi m f_1 t}$ и проинтегрировать на промежутке T_1 :

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi m f_1 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} e^{-j2\pi m f_1 t} dt.$$

Изменяя очередность суммирования и интегрирования в правой части этого соотношения и используя

(2), получим

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = C_m T_1.$$

Отсюда

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt. \quad (3)$$

Поскольку подынтегральная функция $\varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t}$ в правой части равенства (3) изменяется с периодом T_1 , то значение интеграла за период, а следовательно, и коэффициента C_k не зависит от начального аргумента t_0 . Обычно интегрирование ведут в пределах от 0 до T_1 ($t_0 = 0$) или от $-T_1/2$ до $T_1/2$ ($t_0 = -T_1/2$).

Формулы (1) и (3) можно записать в виде одного соотношения (принято $t_0 = -T_1/2$):

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \right] e^{j2\pi k f_1 t} \quad (4)$$

Ряд Фурье (4) мы в дальнейшем будем использовать для представления функций времени t . Однако понятно, что этот ряд справедлив для функций аргумента, имеющего любую физическую природу. Наряду с комплексными гармониками $e^{j2\pi k f_1 t}$ в качестве базовых могут использоваться вещественные гармонические функции $\cos(2\pi k f_1 t)$ и $\sin(2\pi k f_1 t)$. Более того, в обобщенном ряде Фурье возможно применение любых базовых ортогональных функций. В частности, практическое применение находит разложение сигналов сложной формы по кусочно-постоянным (прямоугольным) базовым функциям Уолша и Хаара.

Разновидности гармонических базовых функций. Среди всех возможных видов базовых функций, несомненно, самыми распространенными являются гармонические. Это объясняется тем, что только гармонические (синусоидальные) сигналы при прохождении через линейные цепи сохраняют свою форму: может измениться амплитуда или фаза, но форма и частота синусоидального сигнала не изменяются.

Если сравнивать комплексные ($e^{j2\pi k f_1 t}$) и вещественные ($\cos 2\pi k f_1 t$ и $\sin 2\pi k f_1 t$) базовые функции, то при всех математических преобразованиях гораздо

удобнее применять первые и лишь в конечной стадии, если необходимо, можно перейти к вещественным базовым функциям. Этот переход выполняется просто, на основе известной формулы

$$e^{ja} = \cos a + j \sin a. \quad (5)$$

Покажем связь коэффициентов рядов Фурье с использованием комплексных и вещественных гармонических базовых функций. Пусть $\varphi_p(t)$ — вещественная функция (именно с такими функциями мы и имеем дело в технике). Тогда коэффициенты C_k и C_{-k} , определяемые в соответствии с (3), будут комплексносопряженными. Воспользуемся показательной формой комплексного числа $C_k = |C_k| e^{j\psi_k}$. Тогда

$$|C_k| = |C_{-k}|, \quad \psi_k = -\psi_{-k}.$$

Представим ряд (1) следующим образом

$$\begin{aligned} \varphi_p(t) &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| e^{j\psi_k} e^{j2\pi k f_1 t} + e^{-j\psi_k} e^{-j2\pi k f_1 t} = \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(2\pi k f_1 t + \psi_k). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, вещественная функция $\varphi_p(t)$ может быть представлена в виде суммы косинусоид, изменяющихся с частотой $k f_1$, имеющих амплитуду $2|C_k|$ и начальную фазу ψ_k . Угол ψ_k определяется отношением мнимой и вещественной частей коэффициента C_k , найденного по формуле (3):

$$\psi_k = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} C_k}{\operatorname{Re} C_k}. \quad (7)$$

Далее, используя соотношение

$$\cos(2\pi k f_1 t + \psi_k) = \cos \psi_k \cos(2\pi k f_1 t) - \sin \psi_k \sin(2\pi k f_1 t),$$

можем записать ряд (6) в виде

$$\varphi_p(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_1 t) + b_k \sin(2\pi k f_1 t)], \quad (8)$$

где

$$a_k = 2|C_k| \cos \psi_k \quad \text{и} \quad b_k = -2|C_k| \sin \psi_k. \quad (9)$$

Конечный ряд Фурье. Ряд Фурье (1) содержит бесконечное число членов. Именно в этом случае

можно поставить знак равенства между левой и правой частью в (1). На практике, естественно, мы вынуждены ограничиваться конечным числом членов, вследствие чего указанное равенство соблюдается только приближенно. Как нетрудно показать [6, 16, 27], ряд Фурье имеет важное достоинство: при ограниченном числе членов он обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратической погрешности приближение к исходной функции. Это значит, что если в правой части соотношения (1) вести суммирование от $k = -n$ до $k = n$, где n — некоторое конечное число, то наименьшая среднеквадратическая разность на периоде T_1 между левой и правой частями этого соотношения будет иметь место в том случае, когда коэффициенты C_k определены по формуле (3). При увеличении числа членов ряда Фурье до бесконечности среднеквадратическая погрешность разложения стремится к нулю. Но это не значит, что ряд точно воспроизводит функцию $\varphi_p(t)$ при любом аргументе t . В частности, если функция $\varphi_p(t)$ имеет разрывы, так что в некоторой точке t_1 наблюдаем $\varphi_p(t_1 - 0) \neq \varphi_p(t_1 + 0)$, то тогда ряд Фурье в этой точке сходится к среднеарифметическому значению $(\varphi_p(t_1 - 0) + \varphi_p(t_1 + 0))/2$. Равенство нулю среднеквадратической погрешности разложения при этом возможно лишь потому, что мы имеем конечную погрешность, но на бесконечно малом промежутке изменения аргумента.

2. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Интеграл Фурье. Ряд Фурье (4) справедлив для периодических сигналов. Однако на его основе можно вывести соотношения для преобразования непериодических сигналов. Действительно, непериодический сигнал можно представить как частный случай периодического, но имеющего период, стремящийся к бесконечности. При этом частота f_1 стремится к нулю и ее целесообразно обозначить как дифференциал df . Частота отдельной гармоники kf_1 в этом случае будет играть роль текущей частоты f , а сумма гармоник перейдет в интеграл по этой частоте. В результате для

непериодической функции получим

$$\varphi(t) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \varphi(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \right] e^{j2\pi k f_1 t} \frac{1}{T_1} \right\}.$$

Соответственно

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] e^{j2\pi f t} df. \quad (10)$$

Соотношение (10) носит название интеграла или преобразования Фурье. Оно объединяет прямое преобразование Фурье (ПФ).

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (11)$$

и обратное преобразование Фурье (ОПФ)

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (12)$$

Прямое и обратное преобразования Фурье существуют для функций с ограниченной энергией [21], т. е. таких функций, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt \neq \infty. \quad (13)$$

Именно с такими функциями мы обычно и имеем дело в технике. Но при теоретическом рассмотрении встречаются функции, которые не удовлетворяют этому условию. Для подобных функций нельзя найти преобразование Фурье с помощью аппарата классических функций. Но возможно применение в этом случае так называемых обобщенных функций, к числу которых относится, в частности, дельта-функция.

Преобразование Лапласа. Ко многим функциям, не удовлетворяющим условию (13), применимо преобразование Лапласа. Одностороннее преобразование Лапласа отличается от преобразования Фурье (11) тем, что подынтегральную функцию образуют умножением $\varphi(t)$ не на $e^{-j2\pi f t}$, а на $e^{-(c+j2\pi f)t}$ (где c — вещественный параметр) и интеграл берут в пределах от 0 до ∞ . Вообще говоря, нижний предел интеграла

не обязательно должен быть равен нулю, но он должен быть конечным. Таким образом, преобразование Лапласа можно рассматривать как одностороннее преобразование Фурье произведения $\varphi(t)e^{-ct}$ [16]. Задавая начало отсчета $t=0$ так, чтобы не потерять существенную информацию о функции $\varphi(t)$, и устанавливая константу c так, чтобы обеспечить достаточно быстрое затухание произведения $\varphi(t)e^{-ct}$, мы обеспечиваем возможность реализации преобразования Лапласа практически для всех функций, встречающихся при анализе сигналов. Комплексное число $c + j2\pi f$ обычно обозначают как p , а результат преобразования Лапласа — как функцию аргумента p :

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt. \quad (14)$$

Из сказанного следует, что если известно преобразование Лапласа $\Phi(p)$ некоторой функции $\varphi(t)$, то перейти от него к преобразованию Фурье можно простой подстановкой $p = j2\pi f$ при условии, что функция $\varphi(t)$ при $t < 0$ равна нулю и справедливо соотношение (13).

3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Под преобразованием Фурье (ПФ) мы в дальнейшем будем понимать интеграл Фурье. И хотя перечисленные ниже свойства справедливы как для ряда, так и для интеграла Фурье, мы их будем рассматривать применительно к интегралу Фурье.

Суммирование функций. Преобразование Фурье — линейное преобразование. Отсюда следует, что ПФ линейной комбинации некоторых функций равно аналогичной линейной комбинации ПФ этих функций

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t) \rightleftharpoons \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(f), \quad (15)$$

где a_i — постоянный коэффициент, а стрелки означают переход к преобразованию Фурье и обратно; при этом имеется в виду, что $\varphi_i(t) \rightleftharpoons \Phi_i(f)$. Из (15), в частности, следует, что при умножении функции

на постоянный коэффициент ее ПФ умножается на этот же коэффициент.

Смещение функций. При смещении функции по аргументу на t_0 ее ПФ умножается на $e^{i2\pi f t_0}$. Действительно, проводя замену переменной $t' = t + t_0$, получим

$$\begin{aligned}\varphi(t + t_0) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + t_0) e^{-i2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t') e^{-i2\pi f (t' - t_0)} dt' = e^{i2\pi f t_0} \Phi(f).\end{aligned}\quad (16)$$

Изменение масштаба аргумента функции. Если аргумент t функции $\varphi(t)$ заменить на at , где a — постоянный коэффициент, то ПФ функции с $\Phi(f)$ изменится на $(1/|a|)\Phi(f/a)$. Это нетрудно доказать, осуществляя замену переменной $t' = at$:

$$\begin{aligned}\varphi(at) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(at) e^{-i2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t') e^{-i2\pi \frac{f}{a} t'} dt' = \frac{1}{|a|} \Phi\left(\frac{f}{a}\right).\end{aligned}\quad (17)$$

Появление модуля коэффициента a в (17) вызвано тем, что при отрицательном коэффициенте a замена переменной приводит к изменению знаков у пределов интегрирования. Возвращаясь затем к интегрированию от $-\infty$ до ∞ , мы изменяем знак коэффициента перед интегралом.

Из равенства (17) следует, что сжатие функции $\varphi(t)$ по времени в a раз (рис. 1, a и $в$) приводит к расширению по частоте в a раз соответствующего ПФ $\Phi(f)$ (рис. 1, $б$ и $г$) и наоборот — расширение функции приводит к сжатию ПФ.

Перемножение функций. ПФ произведения двух функций $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ равно свертке их ПФ $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f') \times \times \Phi_2(f - f') df'$. Это свойство доказывается путем использования ОПФ (12) и изменения порядка интег-

ирования:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(t) \varphi_2(t) &\rightleftharpoons \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f') e^{j2\pi f' t} df' \right] \varphi_2(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f') \varphi_2(t) e^{-j2\pi(f-f')t} dt \right] df' = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f') \Phi_2(f-f') df'. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Правая часть данного равенства представляет собой свертку функций $\Phi_1(f)$ и $\Phi_2(f)$. Операция свертки

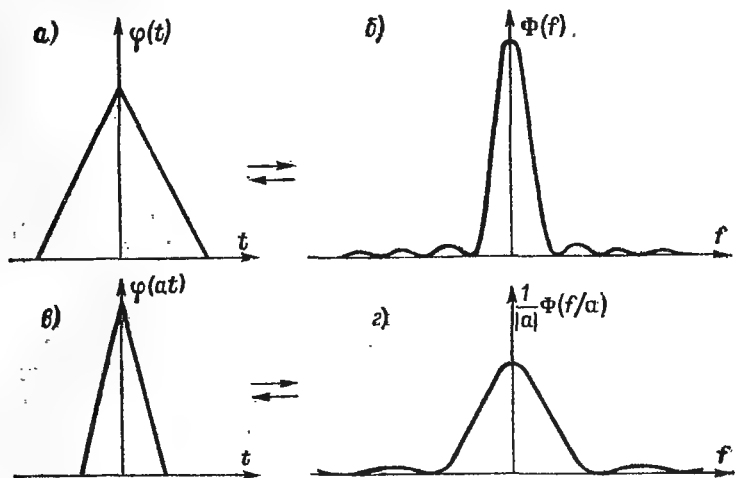


Рис. 1. Изменение спектра функции при изменении ее протяженности во времени

имеет большое значение в теории сигналов. При ее реализации, как мы видим, одна из двух функций берется в том виде, как она исходно задана — $\Phi_1(f')$, а для другой, во-первых, изменяется направление оси абсцисс и, во-вторых, производится сдвиг функции по этой оси на некоторое значение аргумента f :

$$\Phi_2(-f' + f).$$

Затем эти две функции перемножаются и произведение интегрируется, т. е. находится площадь под кривой, соответствующей произведению $\Phi_1(f')\Phi_2(f-f')$. Полученный интеграл и является значением свертки для заданного значения аргумента f .

Операцию свертки часто обозначают значком $*$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(f) * \Phi_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f') \Phi_2(f-f') df' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f-f') \Phi_2(f') df'.\end{aligned}$$

С использованием этого обозначения соотношение (18) можно кратко записать так:

$$\Phi_1(t) \Phi_2(t) \rightleftharpoons \Phi_1(f) * \Phi_2(f).$$

Свертывание функций. ПФ свертки двух функций $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(t') \Phi_2(t-t') dt'$ равно произведению ПФ свертываемых функций $\Phi_1(f)\Phi_2(f)$. Это свойство может быть кратко записано в виде

$$\Phi_1(t) * \Phi_2(t) \rightleftharpoons \Phi_1(f) \Phi_2(f). \quad (19)$$

Доказывается оно путем изменения порядка интегрирования подобно тому, как было доказано предыдущее свойство.

Дифференцирование функции. При дифференцировании функции $\varphi(t)$ ее ПФ $\Phi(f)$ умножается на $j2\pi f$:

$$\frac{d[\varphi(t)]}{dt} \rightleftharpoons j2\pi f \Phi(f). \quad (20)$$

В данном случае для доказательства используем формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[\varphi(t)]}{dt} e^{-j2\pi ft} dt &= [\varphi(t) e^{-j2\pi ft}]_{t=-\infty}^{-\infty} + \\ &+ j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi ft} dt.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, так как функция, для которой существует

ПФ, стремится к нулю при стремлении аргумента к $\pm \infty$ (иначе не будет выполнено условие (13)).

Интегрирование функции. При интегрировании от $-\infty$ до t функции, имеющей равную нулю постоянную составляющую, ее ПФ делится на $j2\pi f$. Действи-

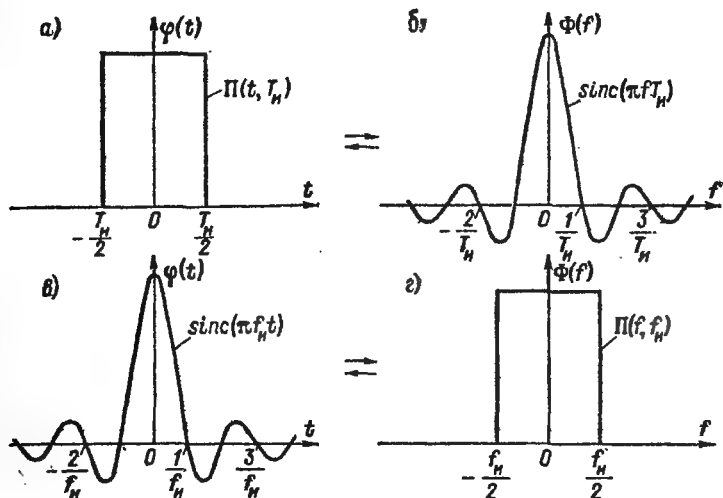


Рис. 2. Обратимость преобразования Фурье

тельно, применяя, как и в предыдущем случае, формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \varphi(t') dt' &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t \varphi(t') dt' \right] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= -\frac{1}{j2\pi f} \left\{ \left[e^{-j2\pi f t} \int_{-\infty}^t \varphi(t') dt' \right]_{t=-\infty}^{\infty} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} \varphi(t) dt \right\} = \frac{1}{j2\pi f} \Phi(f) \end{aligned} \quad (21)$$

при условии, что $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t') dt' = 0$.

Обратимость преобразования Фурье. Преобразование Фурье обратимо с точностью до знака аргумента. Нетрудно увидеть, что формулы ПФ (11) и ОПФ (12) очень похожи друг на друга. Производя

в этих формулах замену переменных $f' = t$ и $t' = f$, мы получаем, что, если

$$\varphi(t) \rightleftharpoons \Phi(f),$$

то

$$\Phi(f) \rightleftharpoons \varphi(-f) \quad \text{и} \quad \Phi(-f) \rightleftharpoons \varphi(f).$$

Для четно-симметричных функций, для которых $\varphi(-t) = \varphi(t)$, ПФ тоже будет четно-симметричным, $\Phi(-f) = \Phi(f)$. Для таких функций преобразование Фурье полностью обратимо. Графики, приведенные на рис. 2, поясняют это положение: ПФ прямоугольного импульса (рис. 2, а) представляет собой функцию $\text{sinc}(\pi f/T_n)$ — рис. 2, а и б, а ПФ импульса вида $\text{sinc}(\pi f_n t)$ имеет вид прямоугольного импульса в частотной области (рис. 2, в и г).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СПЕКТРАХ

4. ЧТО ТАКОЕ СПЕКТР?

Спектром сигнала обычно называют функцию, показывающую зависимость интенсивности различных гармоник в составе сигнала от частоты этих гармоник. Спектр периодического сигнала — это зависимость коэффициентов ряда Фурье от частот гармоник, которым эти коэффициенты соответствуют. Для непериодического сигнала спектр — это преобразование Фурье сигнала. Итак, спектр периодического сигнала — это дискретный спектр (дискретная функция частоты), в то время как для непериодического сигнала характерен непрерывный спектр. Обратим внимание на то, что дискретный и непрерывный спектры имеют разные размерности. Дискретный спектр имеет ту же размерность, что и сигнал, в то время как размерность непрерывного спектра равна отношению размерности сигнала к размерности частоты. Если, например, сигнал представлен электрическим напряжением, то дискретный спектр будет измеряться в вольт-

тах, а непрерывный спектр — в вольтах, деленных на герц. Поэтому для непрерывного спектра употребляют также термин «спектральная плотность».

Спектр (спектральная плотность) $\Phi(f)$ в общем случае представляет собой комплексную функцию:

$$\Phi(f) = |\Phi(f)| e^{j\psi(f)}. \quad (22)$$

Модуль этой функции $|\Phi(f)|$ называют спектром амплитуд, а зависимость $\psi(f)$ — спектром фаз.

Все рассмотренные выше свойства преобразования Фурье (15)—(21) естественно могут быть сформулированы в терминологии теории спектров. В частности, свойства, определяемые формулами (18) и (19), означают, что спектр произведения двух сигналов равен свертке спектров этих сигналов, а спектр свертки сигналов равен произведению их спектров.

Рассмотрим еще некоторые свойства спектров.

Спектр амплитуд вещественного сигнала представляет собой четно-симметричную, а спектр фаз — нечетно-симметричную функцию частоты:

$$|\Phi(f)| = |\Phi(-f)|; \quad \psi(f) = -\psi(-f). \quad (23)$$

Действительно, если $\varphi(t)$ — вещественная функция, то $\Phi(f)$ и $\Phi(-f)$ будут в соответствии с (11) комплексно-сопряженными функциями. Именно с вещественными сигналами мы имеем дело в технике. Поэтому все спектры реальных сигналов обладают указанным свойством.

Данное свойство можно использовать для перехода от математического (теоретического) спектра к физическому спектру. Математический спектр простирается по частоте от $-\infty$ до ∞ . Физически же мы имеем дело только с положительными частотами, и только для положительных частот определяют спектры сигналов аппаратные спектроанализаторы.

Осуществим следующие преобразования формулы ОПФ (12) с учетом (23):

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-\infty}^0 \Phi(f) e^{j2\pi f t} df + \int_0^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f t} df = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} |\Phi(f)| e^{-j\psi(f)} e^{-j2\pi ft} df + \\
&\quad + \int_0^{\infty} |\Phi(f)| e^{j\psi(f)} e^{j2\pi ft} df = \\
&= 2 \int_0^{\infty} |\Phi(f)| \cos [2\pi ft + \psi(f)] df. \quad (24)
\end{aligned}$$

Таким образом, для реальных сигналов мы можем оперировать при осуществлении обратного преобразования Фурье с физическим спектром, при этом физический спектр амплитуд для $f > 0$ равен удвоенному теоретическому, для $f = 0$ значения этих спектров одинаковы. В случае физического спектра спектр фаз выступает как начальная фаза косинусоиды.

Рассмотрим особенности спектров реальных сигналов, график которых симметричен относительно вертикальной оси. Представим формулу (11) в виде

$$\Phi(f) = \int_0^{\infty} [\varphi(-t) e^{j2\pi ft} + \varphi(t) e^{-j2\pi ft}] dt.$$

Для четного сигнала $\varphi(-t) = \varphi(t)$ и $\Phi(f) = 2 \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos(2\pi ft) dt$, для нечетного сигнала $\varphi(-t) =$

$= -\varphi(t)$ и соответственно $\Phi(f) = -2j \int_0^{\infty} \varphi(t) \times$

$\times \sin(2\pi ft) dt$. Следовательно, теоретический спектр четного вещественного сигнала представляет собой четную вещественную функцию частоты. Спектр же нечетного вещественного сигнала — это нечетная мнимая функция частоты.

5. СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ СИГНАЛОВ

Прямоугольный импульс (рис. 3, а). Прямоугольный импульс с единичной амплитудой мы будем обозначать символом $\Pi(t, T_n)$. Здесь первый аргумент обозначает положение импульса на горизонтальной

оси: середина импульса соответствует нулю этого аргумента. Второй аргумент означает ширину импульса. Например, импульс амплитудой A , шириной $2T_0$, расположенный на промежутке оси t от 0 до $2T_0$, будет

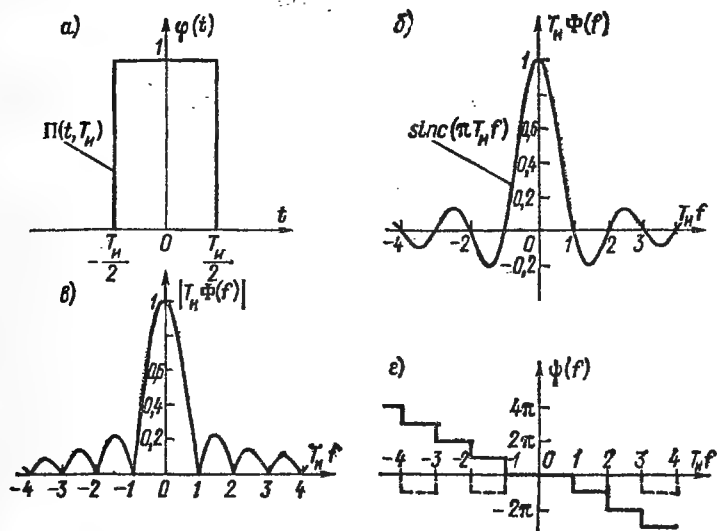


Рис. 3. Прямоугольный импульс (а), его спектр (б), амплитудный (в) и фазовый (г) спектры

обозначен как $A\Pi(t - T_0, 2T_0)$. Спектр прямоугольного импульса $\Pi(t, T_n)$ определяется простым выражением

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t, T_n) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T_n/2}^{T_n/2} e^{-i2\pi ft} dt = \\ &= \frac{\sin(\pi f T_n)}{\pi f}. \end{aligned} \quad (25)$$

На рис. 3, б показан график этого спектра, а на рис. 3, в и г — отдельные графики спектров амплитуд и фаз. Поскольку спектр в данном случае является четной вещественной функцией, то фаза принимает значения, кратные π . Таким образом, все значения фазы можно отобразить двумя уровнями: 0 и $-\pi$ (штриховая линия на рис. 3, г). В реальных физических системах запаздывание фазы обычно возрастает с ростом частоты. Поэтому и для прямоугольного

импульса часто спектр фаз изображают ступенчато убывающим [6] — рис. 3, з.

Функция вида $\sin x/x$ довольно часто встречается в теории спектров. Такую функцию принято обозначать символом $\text{sinc}(x)$ [6].

Таким образом, соответствие прямоугольного импульса его спектру можно показать в виде соотношения

$$\Pi(t, T_n) \rightleftharpoons T_n \text{sinc}(\pi f T_n) = \frac{\sin(\pi f T_n)}{\pi f}. \quad (26)$$

Импульс вида $\text{sinc}(\pi f_n t)$. Исходя из равенства (26) и свойства обратимости ПФ, для импульса $\sin(\pi f_n t)/(\pi f_n t)$ можем записать

$$\text{sinc}(\pi f_n t) = \frac{\sin(\pi f_n t)}{\pi f_n t} \rightleftharpoons \frac{1}{f_n} \Pi(f, f_n). \quad (27)$$

Соответствующие графики показаны на рис. 2.

Треугольный импульс. Треугольный симметричный импульс, середина которого соответствует $t=0$, длительность равна T_n , а амплитуда — единице, мы будем обозначать символом $\Delta(t, T_n)$. Такой импульс можно представить в виде свертки двух одинаковых прямоугольных импульсов длительностью $T_n/2$:

$$\Delta(t, T_n) = \frac{2}{T_n} \Pi\left(t, \frac{T_n}{2}\right) * \Pi\left(t, \frac{T_n}{2}\right).$$

Соответственно этому спектр треугольного импульса выражается через квадрат спектра прямоугольного импульса:

$$\Delta(t, T_n) \rightleftharpoons \frac{2}{T_n} \left[\frac{T_n}{2} \text{sinc}\left(\pi f \frac{T_n}{2}\right) \right]^2 = \frac{\sin^2(\pi f T_n/2)}{\pi^2 f^2 T_n/2}. \quad (28)$$

Треугольный импульс и его спектр показаны на рис. 1.

Ступенчатый импульс можно представить в виде суммы нескольких прямоугольных импульсов. Например, импульс, показанный на рис. 4, а, — это сумма импульсов $2\Pi(t, T_0)$ и $\Pi(t - T_0/2, T_0)$. Соответственно и ПФ для этого импульса может быть найдено как сумма двух составляющих. Одна из этих составляющих — это ПФ прямоугольного импульса (26), а при нахождении второй составляющей можно воспользоваться формулой ПФ функции, смещенной по аргументу, (16). В результате найдем ПФ данного сту-

пенчатого импульса

$$\begin{aligned}\Phi_n(f) &= 2T_0 \operatorname{sinc}(\pi f T_0) + e^{-i\pi f T_0} T_0 \operatorname{sinc}(\pi f T_0) = \\ &= T_0 \operatorname{sinc}(\pi f T_0) (2 + e^{-i\pi f T_0}).\end{aligned}\quad (29)$$

Графики спектров амплитуд и фаз для этого случая показаны на рис. 4, б и в.

Дельта-импульс (функция Дирака). Возьмем прямоугольный импульс амплитудой A и длительностью

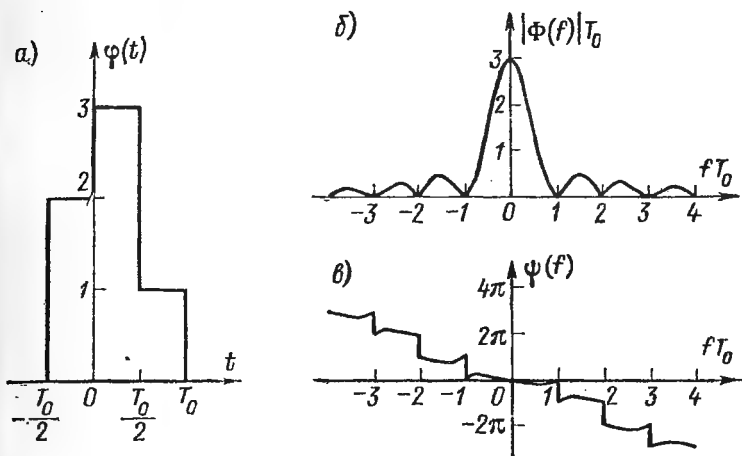


Рис. 4. Ступенчатый импульс (а) и его амплитудный (б) и фазовый (в) спектры

T_n : $\Pi(t, T_n)$. Площадь этого импульса равняется AT_n . Будем теперь уменьшать ширину импульса и увеличивать его амплитуду так, чтобы площадь импульса оставалась постоянной. В пределе ширина импульса станет равной нулю, а его амплитуда — бесконечности. Такой предельный импульс носит название δ -импульса и обозначается как $AT_n\delta(t)$, где аргумент t показывает положение δ -импульса на горизонтальной оси (импульс существует там, где этот аргумент равен нулю), а величина AT_n , стоящая перед δ , указывает площадь импульса. Итак,

$$\delta(t) = \lim_{T_n \rightarrow 0} \left[\frac{1}{T_n} \Pi(t, T_n) \right]. \quad (30)$$

Перепишем соотношение (26) в виде

$$\frac{1}{T_n} \Pi(t, T_n) \rightleftharpoons \operatorname{sinc}(\pi f T_n). \quad (31)$$

Осуществим теперь в этом соотношении предельный переход при T_n , стремящемся к нулю. В результате получим

$$\delta(t) \rightleftharpoons 1. \quad (32)$$

Эта формула означает, что спектр δ -импульса, имеющего единичную площадь, равен единице на всех частотах (рис. 5).

В дальнейшем на графиках мы будем δ -импульсы показывать так, как это сделано на рис. 5, а, — в виде

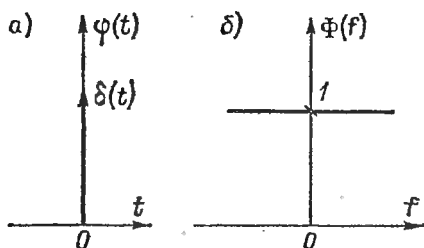


Рис. 5. Дельта-импульс (а) и его спектр (б)

вертикальных отрезков, заканчивающихся стрелками, причем длины этих отрезков предполагаются пропорциональными площадям δ -импульсов.

Для смещенного по времени δ -импульса нетрудно получить

$$\delta(t - t_0) \rightleftharpoons e^{-j2\pi f t_0}. \quad (33)$$

Из соотношения (32) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} df = \delta(t). \quad (34)$$

Используя свойство обратимости преобразования Фурье, можем также записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} dt = \delta(f). \quad (35)$$

Обсудим вопрос, касающийся размерности δ -импульса. Прямоугольный импульс $\Pi(t, T_n)$, как уже говорилось, имеет амплитуду, равную безразмерной единице. Значит, размерность правой части соотношения (30) обратна размерности времени. А раз так, то и

размерность левой части, т. е. импульса $\delta(t)$, обратна размерности времени.

Итак, в общем случае размерность импульса $\delta(x)$ обратна пропорциональности размерности его аргумента x .

Дельта-импульс — это полезная математическая абстракция. Реально такие импульсы не существуют. Но во всех случаях, когда длительность импульса настолько мала, что за время его действия переходный процесс в системе не успевает заметно развиться, мы можем считать этот импульс δ -импульсом.

Набор равноотстоящих δ -импульсов. Рассмотрим N «штук» δ -импульсов, следующих друг за другом с интервалом T_1 . Будем обозначать такую последовательность δ -импульсов $\Pi_N(t, T_1)$, где первый аргумент показывает положение середины последовательности на временной оси (середина соответствует нулю аргумента), а второй — временной интервал между соседними импульсами. Итак,

$$\Pi_N(t, T_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta\left(t - nT_1 + \frac{N-1}{2}T_1\right). \quad (36)$$

Найдем спектр этой функции:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Pi N}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_N(t, T_1) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\pi f T_1 (2n-N+1)} = e^{j\pi f T_1 (N-1)} \frac{e^{-j2\pi f N T_1} - 1}{e^{-j2\pi f T_1} - 1}. \end{aligned} \quad (37)$$

В последнем преобразовании использована формула суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_0 q^n = a_0 \frac{q^N - 1}{q - 1}. \quad (38)$$

На основании равенства (37) нетрудно получить окончательное соотношение

$$\Pi_N(t, T_1) \rightleftharpoons \frac{\sin(\pi f N T_1)}{\sin(\pi f T_1)} = \Phi_{\Pi N}(f). \quad (39)$$

На рис. 6 показаны графики функций $\Phi_{\Pi N}(f)$ для значений $N=5$ и $N=6$. Как видим, это периодические функции, которые имеют наибольшие экстремумы при $f = kf_1 = k/T_1$, где k — целое число. При

четном N знаки этих экстремумов чередуются, при нечетном N все наибольшие экстремумы положительны. С увеличением числа N модуль таких экстре-

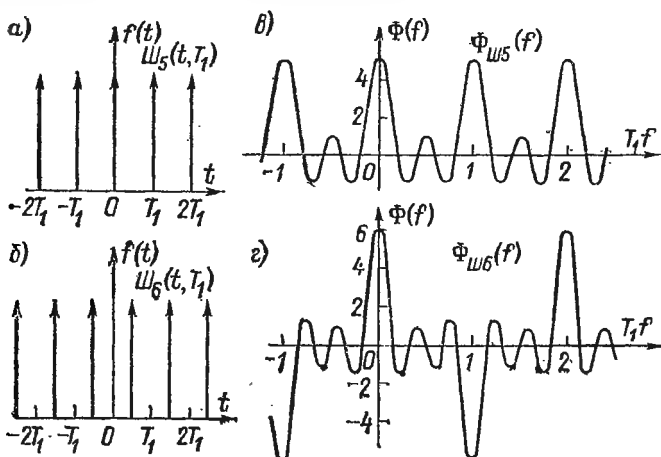


Рис. 6. Наборы нечетного (а) и четного (б) числа δ -импульсов и соответствующие им спектры (в и г)

мумов возрастает, а в промежутках между ними относительные значения функции $\Phi_{WN}(f)$ уменьшаются. В пределе, когда N возрастает до бесконечности, спектр $\Phi_{WN}(f)$ приобретает вид бесконечной последовательности δ -импульсов, расположенных в точках

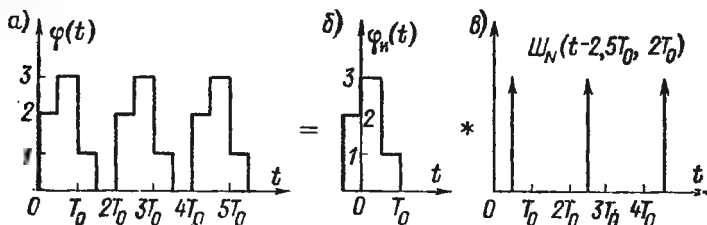


Рис. 7. Представление набора импульсов произвольной формы (а) в виде свертки одиночного импульса (б) и набора δ -импульсов (в)

kf_1 . Этот предельный случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

Набор одинаковых импульсов произвольной формы может быть представлен в виде свертки одиночного импульса данной формы и набора δ -импульсов.

Предположим, что мы анализируем сигнал $\varphi(t)$, представляющий собой набор из трех равноотстоящих ступенчатых импульсов (рис. 7, а). Этот сигнал можно получить, выполняя операцию свертки над одиночным импульсом $\varphi_n(t)$ (рис. 7, б) и последовательностью из трех δ -импульсов (рис. 7, в). Учитывая временные соотношения, указанные на рис. 7, в данном случае можем записать

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi_n(t) * \Pi_3(t - 2,5T_0, 2T_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t-t') [\delta(t' - 0,5T_0) + \delta(t' - 2,5T_0) + \\ &\quad + \delta(t' - 3,5T_0)] dt' = \varphi_n(t - 0,5T_0) + \\ &\quad + \varphi_n(t - 2,5T_0) + \varphi_n(t - 3,5T_0).\end{aligned}$$

При проведении преобразований здесь использовалось известное положение: интеграл от произведения некоторой функции и δ -импульса равен значению этой функции в точке, где существует δ -импульс.

Мы знаем, что при свертке сигналов их спектры перемножаются. Поэтому спектр сигнала, представленного последовательностью импульсов одинаковой формы, равен произведению спектра одиночного импульса и спектра соответствующей последовательности δ -импульсов:

$$\Phi(f) = \Phi_n(f) \Phi_{\Pi N}(f). \quad (40)$$

В рассматриваемом случае следует использовать найденные ранее выражения для спектров одиночного импульса (29) и для набора δ -импульсов (39). Однако следует учесть, что формула (39) относилась к последовательности, середина которой совпадает с началом координат ($t=0$). В данном же случае последовательность δ -импульсов сдвинута вправо на $t=2,5T_0$, а интервалы T_1 между импульсами равны $2T_0$. Поэтому, основываясь на соотношениях (16) и (39), запишем для этой последовательности

$$\Phi_{\Pi 3}(f) = \frac{\sin(6\pi f T_0)}{\sin(2\pi f T_0)} e^{-j5\pi f T_0}.$$

Перемножая $\Phi_{\Pi 3}(f)$ и определяемый формулой (29) спектр $\Phi_n(f)$, можем найти спектр сигнала, представленного на рис. 7, а.

6. СООТНОШЕНИЕ СПЕКТРОВ ОДИНОЧНОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛОВ

Спектральная плотность периодического сигнала. Как уже упоминалось в § 4, спектр периодического сигнала имеет дискретный характер: он представляется набором амплитуд отдельных гармонических составляющих, частота которых кратна частоте сигнала. Спектр же непериодического (одиночного) сигнала — это непрерывная функция, показывающая зависимость от частоты спектральной плотности сигнала. Такой разный подход к описанию спектров создает определенные трудности при рассмотрении произвольных сигналов. Поэтому возникает желание описать оба типа спектров одинаковым образом. Это можно было бы сделать, если бы удалось определить функцию спектральной плотности для периодического сигнала. Поскольку этот сигнал разлагается на совокупность гармоник определенных фиксированных частот, то можно сразу прийти к выводу, что на этих частотах мы получим бесконечно большую спектральную плотность, а в частотных промежутках, разделяющих эти фиксированные частоты, спектральная плотность будет равна нулю. Применим формально преобразование Фурье к периодическому сигналу $\varphi_p(t)$. Иначе говоря, попытаемся найти непрерывный спектр $\Phi_p(f)$ периодического сигнала $\varphi_p(t)$:

$$\begin{aligned}\Phi_p(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} \right] e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi (f - k f_1) t} dt.\end{aligned}$$

Напомним, что $f_1 = 1/T_1$, T_1 — период сигнала $\varphi_p(t)$. Учитывая формулу (35), полученное соотношение можно привести к виду

$$\Phi_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(f - k f_1), \quad (41)$$

где C_k — коэффициенты, определяемые по формуле (3).

Таким образом, непрерывный спектр (спектральная плотность) $\Phi_p(f)$ периодического сигнала $\varphi_p(t)$ представляет собой набор δ -импульсов, расположенных на частотной оси в точках $f = kf_1$ и имеющих площади, равные коэффициентам C_k ряда Фурье для сигнала $\varphi_p(t)$.

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, размерность δ -импульсов обратна размерности их аргумента, так что импульсы $\delta(f - kf_1)$ в (41) имеют размерность 1/Гц и в результате размерность спектральных плотностей периодических и непериодических сигналов совпадает.

В дальнейшем изложении, если не оговорено иное, термин «спектр» мы будем применять в смысле «непрерывный спектр», т. е. понимать под этим зависимость от частоты спектральной плотности сигнала.

Рассмотрим, как соотносятся между собой спектры одиночного сигнала $\varphi(t)$ и периодического сигнала $\varphi_p(t)$, представляющего собой бесконечное повторение с периодом T_1 сигнала $\varphi(t)$.

Определение спектра периодического сигнала по спектру одиночного сигнала. Подставим формулу для коэффициентов ряда Фурье (3) в (41):

$$\Phi_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \right] \delta(f - kf_1).$$

Если в периодическом сигнале $\varphi_p(t)$ одиночные сигналы $\varphi(t)$ повторяются без наложения, иначе говоря, если длительность сигнала $\varphi(t)$ меньше периода T_1 сигнала $\varphi_p(t)$, то тогда на протяжении одного периода сигналы $\varphi_p(t)$ и $\varphi(t)$ совпадают. Поэтому интеграл, стоящий в квадратных скобках последнего соотношения, представляет собой преобразование Фурье функции $\varphi(t)$ для частоты $f = kf_1$. Следовательно, $C_k = f_1 \Phi(kf_1)$ и

$$\Phi_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1 \Phi(kf_1) \delta(f - kf_1). \quad (42)$$

Итак, спектр периодического сигнала представляет собой дискретизированный спектр соответствующего одиночного сигнала.

Для примера на рис. 8 показаны графики спектров $\Phi(f)$ для одиночного прямоугольного импульса (штриховая линия 1) и $\Phi_p(f)$ для периодической последовательности таких импульсов (последовательность модулированных по площади δ -импульсов 2). Если увеличивать период импульсов T_1 , то δ -импульсы 2 на графике рис. 8, б будут располагаться чаще, а их

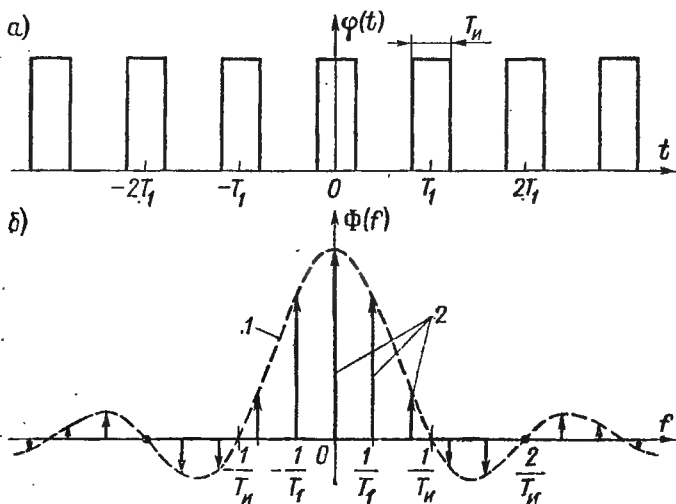


Рис. 8. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (а) и спектры (б): одиночного прямоугольного импульса (кривая 1) и бесконечной периодической последовательности (набор δ -импульсов 2)

площадь будет уменьшаться. В пределе, когда период T_1 становится равным бесконечности, набор δ -импульсов преобразуется в непрерывную кривую $\Phi(f)$.

Если периодический сигнал представляет собой бесконечную последовательность δ -импульсов, следующих равномерно с периодом T_1 , то его спектр будет также представлять бесконечную последовательность δ -импульсов, но уже в частотной области. В соответствии с (32) для импульса $\delta(t)$ спектр равен единице при любой частоте. Поэтому на основании формулы (42) для сигнала $\Pi_\infty(t, T_1)$ получим спектр

$$\Phi_{\Pi_\infty}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1 \delta(f - kf_1). \quad (43)$$

Для сдвинутой на полпериода относительно оси ординат последовательности δ -импульсов $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_1/2 - nT_1)$ нетрудно получить

$$\Phi_{\text{шс } \infty}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1 (-1)^k \delta(f - kf_1). \quad (44)$$

Определение спектра одиночного сигнала по спектру периодического сигнала. Соотношение (42) позволяет по спектру одиночного сигнала определить спектр периодического сигнала. Но возможна и обратная операция: по спектру периодического сигнала можно найти спектр соответствующего одиночного сигнала. Действительно, зная спектр периодического сигнала $\Phi_p(f)$, можно с помощью ОПФ найти периодический сигнал $\varphi_p(t)$ и, выделив один период этого сигнала, определить одиночный сигнал $\varphi(t)$ (для того чтобы провести такую операцию, естественно, необходимо, чтобы не было наложения, т. е. чтобы длительность одиночного сигнала не превышала периода периодического сигнала). Преобразование Фурье одиночного сигнала и представляет собой искомый спектр.

Выделение одиночного сигнала $\varphi(t)$ из периодического $\varphi_p(t)$ можно произвести, умножая сигнал $\varphi_p(t)$ на прямоугольный импульс, длительность которого равна периоду T_1 . Если промежуток времени T_1 , соответствующий одиночному сигналу, располагается симметрично относительно начального момента времени ($t = 0$), то тогда можно записать:

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) \Pi(t, T_1).$$

Соответственно этому спектр одиночного сигнала $\varphi(t)$ будет представлять собой свертку спектров периодического сигнала и прямоугольного импульса

$$\Phi(f) = \Phi_p(f) * \frac{\sin(\pi f T_1)}{\pi f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \frac{\sin[\pi T_1 (f - kf_1)]}{\pi (f - kf_1)}. \quad (45)$$

При выводе этой формулы учитывалось соотношение (41).

Таким образом, зная площади C_k δ -импульсов спектра периодического сигнала, мы можем найти описание спектра соответствующего одиночного

сигнала. Обратим внимание на то, что, как следует из (41) и (42), коэффициенты C_k — это взятые с коэффициентом f_1 отсчеты спектра одиночного сигнала:

$$C_k = f_1 \Phi(kf_1).$$

Отсюда следует, что непрерывный спектр одиночного сигнала может быть однозначно восстановлен по дискретным отсчетам этого спектра, взятым с частотным интервалом, не превышающим $1/T_1$, где T_1 — длительность сигнала.

Если сравнить непрерывную кривую спектра $\Phi(f)$ и дискретную последовательность $\Phi_p(f)$ (рис. 8, б), то может показаться, что функция $\Phi(f)$ более информативна, чем $\Phi_p(f)$. А на самом деле, как мы видим, объем информации, содержащейся в описаниях этих двух функций, одинаков.

Изменение спектра при постепенном переходе от одиночного к периодическому сигналу, когда при сохранении периода T_1 увеличивается число повторений сигнала $\varphi(t)$, можно проследить следующим образом. Если сигнал $\varphi_N(t)$ представляет собой сигнал $\varphi(t)$, повторенный N раз, то, как показано в предыдущем параграфе, его спектр $\Phi_N(f)$ может быть найден как произведение спектра $\Phi(f)$ одиночного сигнала $\varphi(t)$ и спектра последовательности N «штук» δ -импульсов:

$$\Phi_N(f) \rightleftharpoons \Phi(f) \frac{\sin(\pi f N T_1)}{\sin(\pi f T_1)} = \Phi_N(f).$$

При $N=1$ получаем $\varphi_N(t) = \varphi(t)$ и $\Phi_N(f) = \Phi(f)$.

Если $N > 1$, то тогда спектр $\Phi(f)$ приобретает вид импульсной последовательности в частотной области, причем форма импульсов приближенно описывается выражением $\frac{\sin(\pi f N T_1)}{\sin(\pi f T_1)}$, а середины этих импульсов лежат на частотной оси в точках $f = kf_1 = k/T_1$, где k — целое число. Амплитуды импульсов пропорциональны соответствующим значениям спектра $\Phi(f)$ одиночного сигнала.

С увеличением числа повторений N амплитуда импульсов возрастает. В пределе, когда N возрастает до бесконечности, спектр $\Phi_{\text{шн}}(f)$ приобретает вид бесконечной последовательности δ -импульсов в частотной области. При умножении этой последовательности на спектр $\Phi(f)$ и образуется спектр периодического сигнала.

Для иллюстрации на рис. 9, *г* и *е* показаны спектры последовательности из пяти и девяти прямоугольных

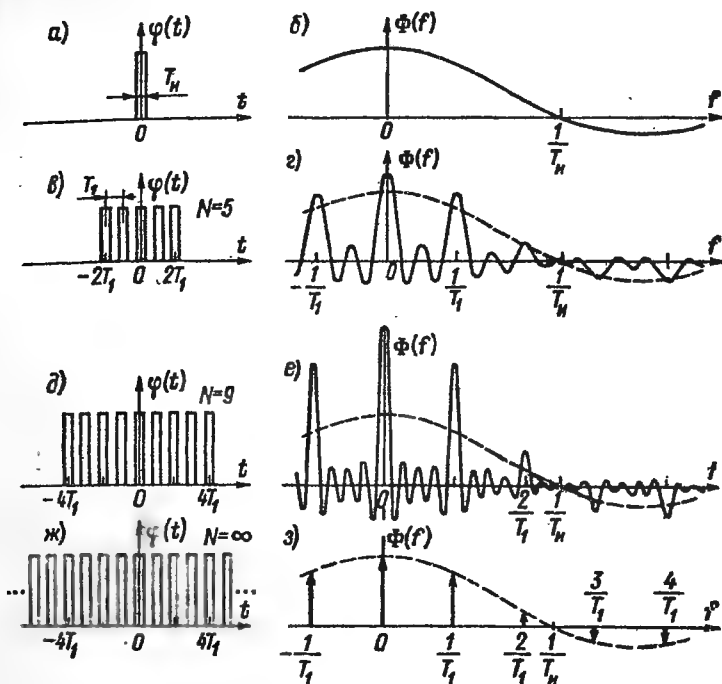


Рис. 9. Изменение спектра сигнала (б, г, е, з) при переходе от одиночного импульса (а) к бесконечной периодической последовательности (в, д, ж)

импульсов. Штриховые кривые на этом рисунке соответствуют спектру одиночного прямоугольного импульса.

7. ТЕКУЩИЙ СПЕКТР

При выполнении преобразования Фурье в соответствии с (11) необходимо проводить интегрирование в бесконечных пределах по времени. Осуществить это в общем случае невозможно, так как для такого интегрирования нужно располагать информацией о сигнале $\varphi(t)$, начиная с бесконечно давних времен и кончая бесконечно далеким будущим. В принципе

можно предположить, что нам известен сигнал $\varphi(t)$ на промежутке времени от $t = -\infty$ и до некоторого текущего момента времени $t = T$. Тогда формула для спектра примет вид

$$\Phi_T(f) = \int_{-\infty}^T \varphi(t) e^{-i2\pi ft} dt.$$

Однако на практике мы обычно имеем описание сигнала только начиная с некоторого момента времени, который можно принять за нулевой ($t = 0$), и кончая текущим моментом $t = T$. Соответственно этому запишем

$$\Phi_T(f) = \int_0^T \varphi(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (46)$$

Спектр $\Phi_T(f)$, определяемый по формуле (46) или ей подобной, носит название текущего спектра [27]. Этот спектр может определяться в реальном времени; при его вычислении нет необходимости ожидать завершения процесса, в результате которого вырабатывается сигнал $\varphi(t)$. В общем случае текущий спектр — это функция двух аргументов: частоты f и времени T .

Обратное преобразование Фурье, примененное к текущему спектру, воспроизводит функцию $\varphi_T(t)$, равную сигналу $\varphi(t)$ на промежутке времени от $t = 0$ до $t = T$ и равную нулю за пределами этого промежутка:

$$\varphi_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(f) e^{i2\pi ft} df = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, t > T. \end{cases}$$

Функция $\varphi_T(t)$ может быть представлена в виде произведения сигнала $\varphi(t)$ и прямоугольного импульса:

$$\varphi_T(t) = \varphi(t) \Pi(t - T/2, T).$$

Поэтому спектр $\Phi_T(f)$ представляет собой сверку спектра сигнала $\varphi(t)$ и спектра прямоугольного им-

$$\Phi_T(f) = \Phi(f) * \Phi_{\Pi}(f). \quad (47)$$

Исходя из соотношения (26) и учитывая сдвиг прямоугольного импульса во времени, спектр $\Phi_{\Pi}(f)$ в данном случае можно описать следующим образом:

$$\Phi_{\Pi}(f) = T \operatorname{sinc}(\pi f T) e^{-i\pi f T}.$$

Требования к длительности сигнала. Рассмотрим, какова должна быть длительность наблюдения сигнала для того, чтобы его текущий спектр $\Phi_T(f)$ мало отличался от спектра $\Phi(f)$, соответствующего бесконечному времени наблюдения. Вначале нужно определить, что здесь значит «мало отличался». При реализации свертки (47) нужно перемножать спектры $\Phi(f')$ и $\Phi_{\Pi}(f - f')$ и затем интегрировать это произведение. Очевидно, что спектры $\Phi_T(f)$ и $\Phi(f)$ совпадали бы друг с другом, если бы спектр $\Phi_{\Pi}(f)$ имел вид δ -импульса в частотной области. Поскольку этого нет, то при переходе от $\Phi(f)$ к $\Phi_T(f)$ (т. е. в процессе свертки) происходит определенное сглаживание кривой $\Phi(f)$.

Предположим, что для нас существенны пульсации кривой спектра $\Phi(f)$, наименьший период которых равен Δf . Отсюда следует, что спектр $\Phi_T(f)$ не должен заметно отличаться по этим пульсациям от спектра $\Phi(f)$. А это может быть только при условии, что ширина спектра прямоугольного импульса будет много меньше интервала Δf . Будем эту ширину приближенно определять по основному лепестку спектра, тогда она окажется равной $2/T$ ($2/T_n$ на рис. 3, б). Соответственно этому сформулированное выше условие запишется так:

$$2/T \ll \Delta f.$$

Таким образом, длительность реализации некоторого процесса, по которой мы определяем его спектр, должна быть много больше удвоенного периода наивысшей, подлежащей выявлению гармонике этого спектра:

$$T \gg \frac{2}{\Delta f}. \quad (48)$$

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

8. СПЕКТРЫ ЭНЕРГИИ И МОЩНОСТИ

В размерность спектральной плотности $\Phi(f)$ входит размерность амплитуды сигнала в первой степени. Поэтому функцию спектральной плотности $\Phi(f)$ часто называют амплитудным спектром (в более узком смысле амплитудный спектр — это модуль $|\Phi(f)|$). Наряду с этим находит применение также энергетический спектр, размерность которого содержит квадрат амплитуды сигнала. Найдем связь между этими двумя видами спектров.

В соответствии с (18) спектр произведения сигналов равен свертке их спектров

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f') \Phi_2(f - f') df'.$$

Положим в этом соотношении $f=0$. Тогда будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f) \Phi_2(f) df. \quad (49)$$

При записи этой формулы опущен штрих у обозначения аргумента f и учтено, что для вещественных сигналов $\Phi(f)$ и $\Phi(-f)$ представляют собой комплексно-сопряженные функции: $\Phi(-f) = \Phi^*(f)$. Если $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$, то эта формула приобретает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f)|^2 df. \quad (50)$$

Соотношения (49) и (50) составляют суть теоремы Парсеваля [6, 16, 21] или теоремы Рэйли [27]. Из (50), в частности, следует, что для определения энергии сигнала можно интегрировать квадрат модуля спектральной плотности по всему диапазону частот.

Действительно, предположим, что функция $\varphi(t)$ показывает изменение во времени напряжения на резисторе сопротивлением 1 Ом. Тогда левая часть равенства (50) есть не что иное, как энергия, выделившаяся на этом резисторе. Следовательно, функция $|\Phi(f)|^2$ показывает, каким образом распределена эта энергия по различным частотным компонентам сигнала. Это дает основание назвать эту функцию спектральной плотностью энергии или просто спектром энергии $\Phi_s(f)$:

$$\Phi_s(f) = |\Phi(f)|^2. \quad (51)$$

Обратим внимание на то, что спектр энергии совершенно не зависит от спектра фаз $\psi(f)$, а определяется исключительно квадратом спектра амплитуд сигнала $\varphi(t)$.

Если нам известно, что сигнал $\varphi(t)$ был отличен от нуля только на некотором промежутке времени T , то тогда для средней мощности сигнала P можем записать:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi(f)|^2}{T} df.$$

Отсюда следует, что функция $|\Phi(f)|^2/T$ — это спектральная плотность средней мощности сигнала, или, кратко, спектр мощности, который мы будем обозначать как $S(f)$:

$$S(f) = \frac{\Phi_s(f)}{T} = \frac{|\Phi(f)|^2}{T}. \quad (52)$$

Хотя $S(f)$ — это спектр мощности, а не энергии, тем не менее его часто называют энергетическим спектром.

Вполне понятно, что спектр мощности можно использовать также и для того, чтобы показать, как распределяется средняя мощность части процесса. Пусть $-T/2$ и $T/2$ — это границы рассматриваемого промежутка времени. Тогда

$$S_T(f) = \frac{\Phi_{sT}(f)}{T} = \frac{|\Phi_T(f)|^2}{T}, \quad (53)$$

где

$$\Phi_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) e^{-i2\pi f t} dt. \quad (54)$$

Для случайного процесса характерно то, что его значение в некоторый фиксированный момент времени t является случайной величиной. Если мы, например, возьмем несколько одинаковых электронных усилителей, находящихся в одинаковых условиях, и будем наблюдать изменения шумовых напряжений на их выходах, то для любого момента времени t эти напряжения на выходах разных усилителей будут в общем случае различны и непредсказуемы. К выходному напряжению каждого из усилителей мы можем применить преобразование Фурье и таким образом определить спектр шумового сигнала. Естественно попытаться далее усреднить спектры по всему множеству усилителей, т. е. найти некоторый средний спектр. Но если таких усилителей достаточно много, то вполне может оказаться, что средний спектр будет близок к нулю. Дело в том, что если даже амплитуды частотных компонентов на выходах всех усилителей одинаковы, то их фазы наверняка различаются. И если фаза может с одинаковой вероятностью принимать любое значение в промежутке от 0 до 2π , то тогда усреднение по всем усилителям и будет давать нулевой спектр.

Здесь уместно вспомнить, что энергетический спектр, как мы увидели в предыдущем параграфе, не зависит от фазовых соотношений частотных компонентов. Поэтому именно энергетический спектр и применяется для характеристики интенсивности случайных, в частности шумовых, процессов.

Наиболее простой в смысле математического описания, но вместе с тем типичный для многих реальных процессов, — это случайный процесс, обладающий свойствами стационарности и эргодичности. Первое свойство означает, что характеристики случайного процесса при прочих равных условиях не зависят от того, когда мы наблюдаем этот случайный процесс. Применительно к приведенному выше примеру с усилителями это означает, что если условия работы усилителей не изменяются, то не имеет значения, когда мы наблюдаем шум усилителей: сегодня или завтра, утром или вечером. Второе свойство, свойство

эргодичности, говорит о том, что для рассматриваемого случайного процесса усреднение по множеству может быть заменено усреднением по времени. Иначе говоря, вместо того, чтобы усреднять характеристики шума по множеству усилителей, можно просто достаточно долго наблюдать шум одного усилителя и затем найти средние характеристики этого шума.

Для стационарного эргодического случайного процесса спектр мощности определяется исходя из соотношений (53) и (54) при условии, что время наблюдения T стремится к бесконечности:

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\Phi_T(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2. \quad (55)$$

При применении соотношения (55) для нахождения оценки спектра мощности по экспериментальным данным обычно приходится дополнительно проводить сглаживание в частотной области, с тем чтобы сделать эту оценку статистически состоятельной.

Энергетический спектр (спектр мощности) случайного процесса является неслучайной функцией частоты. Типичными, например, являются случайные процессы в виде шума с постоянной спектральной плотностью

$$S(f) = S_0 \quad (56)$$

или шума со спектральной плотностью, возрастающей при убывании частоты по закону

$$S(f) = S_0 \frac{f_0}{f}. \quad (57)$$

Первый вид шума называют белым шумом, а второй — фликкер-шумом или розовым шумом. В частности, шум электронного усилителя в большинстве случаев можно приближенно представить в виде суммы двух подобных составляющих:

$$S = S_0 (1 + f_0/f). \quad (58)$$

В формуле (58) f_0 — это частота сопряжения белого и розового шумов; при $f < f_0$ преобладает розовый шум, а при $f > f_0$ более значимым является белый шум. На рис. 10 в качестве примера показаны графики спектральной плотности шумового напряжения двух различных операционных усилителей: отечественного типа К574УДЗ и американского типа

LT1013 (фирма «Линейар текнолоджи»). Из рисунка видно, что у усилителя К574УДЗ несколько ниже интенсивность белого шума, но значительно выше интенсивность фликкер-шума.

Из формулы (57) следует, что при стремлении частоты к нулю энергетический спектр розового шума

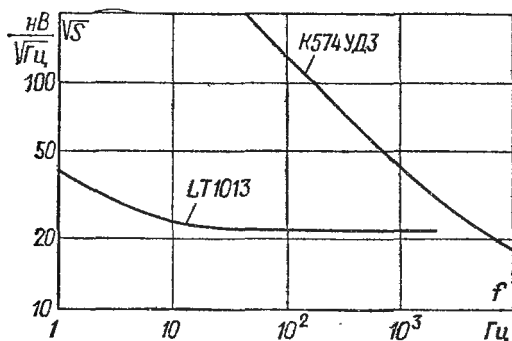


Рис. 10. Энергетические спектры шумов операционных усилителей

неограниченно возрастает. Экспериментальные исследования шумов усилителей показывают, что зависимость (57) действительно справедлива до весьма низких частот (10^{-3} — 10^{-5} Гц) [19].

10. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Степень изменчивости во времени случайного процесса обычно характеризуют функцией ковариации, которая для стационарного эргодического процесса определяется формулой

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) \varphi(t - \tau) dt. \quad (59)$$

Как видно из этой формулы, ковариация показывает усредненную взаимосвязь двух значений случайного процесса, разделенных промежутком времени τ . Случайный процесс может содержать постоянную со-

ставляющую

$$\bar{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) dt. \quad (60)$$

Для того чтобы определить изменчивость только переменной составляющей процесса, используют функцию корреляции, которая представляет собой ковариацию для этой составляющей:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\varphi(t) - \bar{\varphi}][\varphi(t - \tau) - \bar{\varphi}] dt = K(\tau) - \bar{\varphi}^2. \quad (61)$$

Рассмотрим одну реализацию длительностью T стационарного случайного процесса $\varphi(t)$. Для этой реализации в соответствии с (54) может быть найден спектр $\Phi_T(f)$. Для смещенного во времени на τ варианта этой реализации $\varphi(t - \tau)$ очевидно получим спектр $\Phi_T(f)e^{-j2\pi f\tau}$. Если теперь в соотношение (49) подставить $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ и $\varphi_2(t) = \varphi(t - \tau)$, то получим

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) \varphi(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(f) \Phi_T(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

Поделив на T обе части последнего равенства и перейдя к пределу при T , стремящемся к бесконечности, получим

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (62)$$

Таким образом ковариационная функция стационарного эргодического случайного процесса представляет собой обратное преобразование Фурье его энергетического спектра. Соответственно этому справедливо и прямое преобразование Фурье

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (63)$$

Формулы (62) и (63) представляют собой суть теоремы Винера — Хинчина.

Как было показано в § 4, амплитудный спектр реального сигнала представляет собой четную функцию. В соответствии с равенством (55) энергетический спектр любого реального случайного процесса также функция четная: $S(f) = S(-f)$. Четной функцией является и ковариационная функция стационарного случайного процесса: $K(\tau) = K(-\tau)$. Вследствие сказанного теорема Винера — Хинчина может быть также записана в виде следующих формул:

$$K(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(f) \cos(2\pi f\tau) df; \quad (64)$$

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau. \quad (65)$$

Шумовые случайные сигналы, с которыми приходится иметь дело в измерительных устройствах, обычно имеют математическое ожидание, равное нулю. Для таких сигналов ковариационная и корреляционная функции совпадают. Корреляционная функция, взятая при нулевом значении аргумента, — это дисперсия сигнала: $R(0) = D$. Соответственно этому для подобных сигналов из (62) и (64) получаем соотношение

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = 2 \int_0^{\infty} S(f) df. \quad (66)$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СПЕКТРЫ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

11. ВЛИЯНИЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ НА СПЕКТР СИГНАЛА

Спектр дискретного сигнала. При измерениях некоторой величины часто фиксируют результаты измерения через одинаковые временные промежутки.

Если считать, что измерительный прибор отображает мгновенные значения исследуемого процесса, то тогда окажется, что вместо непрерывного реального сигнала мы получаем набор равноотстоящих по времени его мгновенных значений. Возникает вопрос, можно ли по этой совокупности отдельных точек полностью восстановить исходный сигнал.

Одним из методов восстановления может быть такой. Всем измеренным значениям сигнала мы ставим

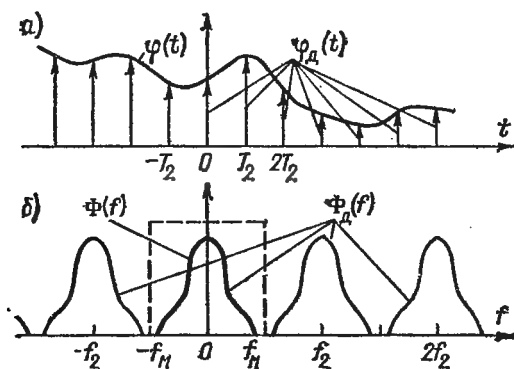


Рис. 11. Дискретизированный сигнал (а) и его спектр (б)

в соответствие узкие прямоугольные импульсы постоянной длительности T_0 , амплитуды которых пропорциональны результатам измерения. А затем фильтруем эту последовательность импульсов. Каковы будут результаты такой фильтрации? Это зависит от спектра дискретизированного сигнала и от вида фильтра. Рассмотрим, как соотносятся между собой спектры непрерывного $\varphi(t)$ и дискретизированного $\varphi_d(t)$ сигналов.

Будем считать, что амплитуда упомянутых узких прямоугольных импульсов равна соответствующим значениям входного сигнала, умноженным на коэффициент T_2/T_0 , где T_2 — период дискретизации (время между центрами соседних импульсов). Если длительность импульсов T_0 достаточно мала в сравнении с периодом дискретизации, то можно приближенно считать, что в процессе дискретизации непрерывный сигнал $\varphi(t)$ заменяется набором δ -импульсов (рис. 11, а), площади которых равны $T_0(T_2/T_0)\varphi(nT_2) = T_2\varphi(nT_2)$.

В этом случае функцию $\Phi_d(t)$ можно представить в виде произведения:

$$\Phi_d(t) = \Phi(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_2 \delta(t - nT_2) = \Phi(t) T_2 \text{Ш}_{\infty}(t, T_2). \quad (67)$$

Спектр дискретизированного сигнала $\Phi_d(f)$ соответственно найдем в виде свертки

$$\Phi_d(f) = T_2 \Phi(f) * \Phi_{\text{Ш}_{\infty}}(f), \quad (68)$$

где $\Phi_{\text{Ш}_{\infty}}(f)$ — спектр функций $\text{Ш}_{\infty}(t, T_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_2)$.

Спектр $\Phi_{\text{Ш}_{\infty}}(f)$ определим на основании формулы (43):

$$\Phi_{\text{Ш}_{\infty}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_2 \delta(f - kf_2), \quad (69)$$

где $f_2 = 1/T_2$.

Подставляя (69) в (68), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f' - kf_2) \Phi(f - f') df' = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(f - kf_2). \end{aligned} \quad (70)$$

Это соотношение означает, что спектр дискретизированного сигнала равен сумме бесконечного числа спектров исходного непрерывного сигнала, сдвинутых относительно друг друга на частоту дискретизации.

Графики спектров $\Phi(f)$ и $\Phi_d(f)$ для непрерывного и соответствующего дискретизированного сигналов показаны на рис. 11, б.

Спектр дискретного сигнала со смещенными импульсами. При дискретизации сигнала обычно один из равноотстоящих отсчетов сигнала совмещают с начальным моментом времени $t = 0$. Именно такой случай мы только что рассмотрели. Однако в принципе дискретизация может осуществляться и в моменты времени $(nT_2 + \alpha T_2)$, где n — любое целое отрицательное или положительное число, T_2 — интервал дискретизации, α — коэффициент, показывающий положение нулевого отсчета сигнала относительно начального момента времени (в общем случае коэффициент α содержит как целую, так и дробную часть). Оче-

видно, что и в этом случае будет справедливо равенство (68) $\Phi_d(f) = T_2 \Phi(f) * \Phi_{\text{ш}\infty}(f)$, но спектр $\Phi_{\text{ш}\infty}(f)$ здесь будет определяться соотношением

$$\text{ш}_{\infty}(t - \alpha T_2, T_2) \rightleftharpoons \Phi_{\text{ш}\infty}(f) = f_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi k\alpha} \delta(f - kf_2). \quad (71)$$

Соответственно этому получим

$$\Phi_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(f - kf_2) e^{-j2\pi k\alpha}. \quad (72)$$

Полученная формула (72) представляет собой обобщение формулы (70) на случай произвольного расположения последовательности равноотстоящих отсчетов сигнала относительно начального момента времени. Из нее следует, что в общем случае равномерной дискретизации амплитудный спектр дискретизированного сигнала всегда представляет собой периодическую функцию частоты f (период равен f_2). Что же касается фазового спектра, то он будет периодически изменяться с периодом f_2 только в случае, если коэффициент α представляет собой целое число. При произвольном же значении α фазовые спектры соседних повторений спектра дискретизированного сигнала будут отличаться на $2\pi\alpha$. В частности, если $\alpha = 0,5$, то тогда соседние повторения спектра будут различаться только знаком.

Спектры ступенчатого и кусочно-линейного сигналов, восстановленных по дискретным отсчетам. Соотношение (70) описывает спектр дискретного сигнала для наиболее типичного случая $\alpha = 0$. Дискретный сигнал, как уже упоминалось, может быть получен, например, при измерении равноотстоящих по времени мгновенных значений некоторого непрерывного процесса. При последующей обработке результатов измерения часто возникает задача восстановления исходной непрерывной кривой по серии имеющихся мгновенных значений. При этом обычно используется аппроксимация полиномами нулевого или первого порядка, в результате чего получаем ступенчатую или кусочно-линейную кривую. Рассмотрим, как соотносятся спектры дискретизированного сигнала $\Phi_d(t)$ и восстановленных ступенчатого $\Phi_{\text{ст}}(t)$ или кусочно-линейного $\Phi_{\text{кл}}(t)$ сигналов.

Ступенчатый сигнал может быть представлен в виде свертки дискретного сигнала $\Phi_d(t)$ и одиночного прямоугольного импульса $A\Pi(t, T_2)$. Определим, чему должна быть равна амплитуда A одиночного импульса. В соответствии с (67) дискретный сигнал представляет собой последовательность δ -импульсов

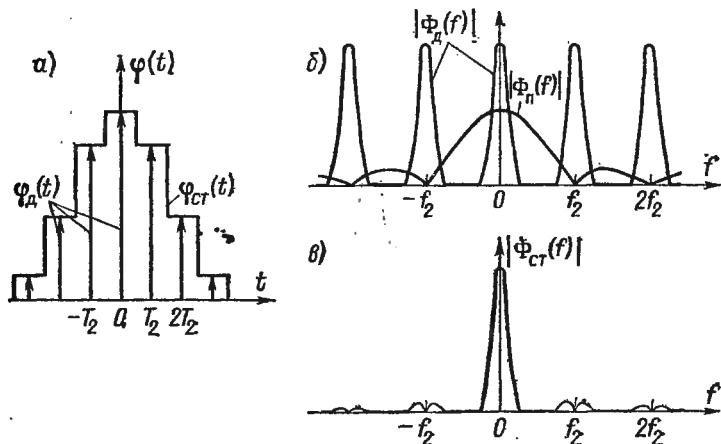


Рис. 12. Дискретный и ступенчатый сигналы (а) и их спектры (б и в)

вида $\Phi(nT_2)T_2\delta(t - nT_2)$. В результате указанной свертки каждый из таких δ -импульсов будет замещен прямоугольным импульсом $\Phi(nT_2)T_2A\Pi(t - nT_2, T_2)$. Для того чтобы амплитуда этого прямоугольного импульса была равна отсчету сигнала $\Phi(nT_2)$, очевидно требуется, чтобы A было равно $1/T_2$. Таким образом,

$$\Phi_{CT}(t) = \Phi_d(t) * [(1/T_2)\Pi(t, T_2)]. \quad (73)$$

Соответственно этому спектр $\Phi_{CT}(f)$ ступенчатого сигнала — это произведение спектров $\Phi_d(f)$ и $(1/T_2)\Phi_{\Pi}(f)$, определяемых формулами (70) и (26):

$$\Phi_{CT}(f) = \Phi_d(f) \frac{1}{T_2} \Phi_{\Pi}(f) = \frac{\sin(\pi f T_2)}{\pi f T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(f - kf_2). \quad (74)$$

Полученное соотношение говорит о том, что при переходе от дискретного к ступенчатому представлению спектр сигнала умножается на $\text{sinc}(\pi f T_2)$. Это

положение поясняет рис. 12. На рис. 12, а показаны графики дискретного и ступенчатого сигналов, на рис. 12, б приведены графики спектров дискретного сигнала и прямоугольного импульса, и наконец на рис. 12, в дан график спектра ступенчатого сигнала.

Кусочно-линейный сигнал — это свертка дискретного сигнала и одиночного треугольного импульса $(1/T_2)\Delta(t, 2T_2)$, амплитуда которого равна $1/T_2$,

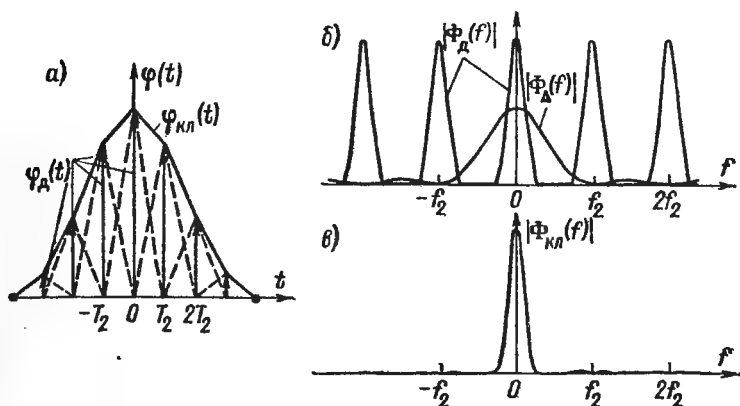


Рис. 13. Дискретный и кусочно-линейный сигналы (а) и их спектры (б и в)

а длительность равна удвоенному интервалу дискретизации $2T_2$:

$$\varphi_{кл}(t) = \varphi_d(t) * [(1/T_2)\Delta(t, 2T_2)]. \quad (75)$$

На рис. 13, а показано, как, суммируя треугольные импульсы (обозначены на рисунке штриховыми линиями), мы получаем кусочно-линейный сигнал $\varphi_{кл}(t)$. Спектр кусочно-линейного сигнала нетрудно определить, перемножая спектры дискретного сигнала и треугольного импульса. Используя формулы (70) и (28), получаем

$$\Phi_{кл}(f) = \Phi_d(f) \frac{1}{T_2} \Phi_{\Delta}(f) = \frac{\sin^2(\pi f T_2)}{(\pi f T_2)^2} \Phi_d(f). \quad (76)$$

Графики соответствующих спектров показаны на рис. 13, б и в.

Анализируя полученные соотношения, приходим к выводу, что по сравнению со спектром дискретного сигнала спектр ступенчатого сигнала меньше

отличается от спектра исходного непрерывного сигнала. В свою очередь кусочно-линейный сигнал предпочтителен в сравнении со ступенчатым: еще меньше содержит дополнительных высших гармоник, обусловленных процессом дискретизации.

12. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Рассмотрим еще раз рис. 11, б. Как мы видим, спектр дискретизированного сигнала включает в себя спектр непрерывного сигнала (будем его называть

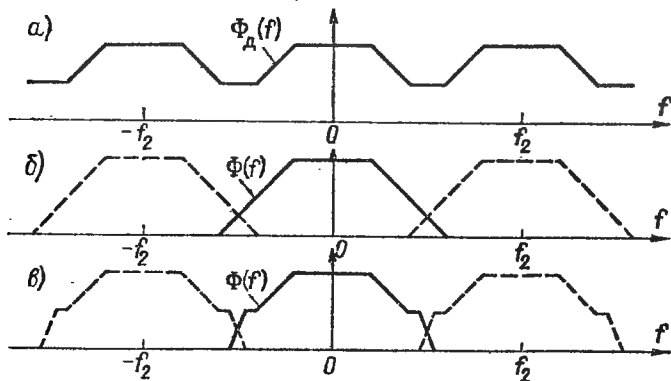


Рис. 14. Наложение спектров при дискретизации сигнала

основным спектром) и бесконечное множество повторов основного спектра (будем их называть дублирующими спектрами). Для наглядности основной спектр показан таким, что он не перекрывается с дублирующими спектрами. Очевидно, что может быть и иначе: основной и дублирующий спектры могут частично накладываться друг на друга. Если такое наложение будет иметь место, то тогда по кривой спектра дискретного сигнала $\Phi_D(f)$ невозможно будет однозначно восстановить спектр непрерывного сигнала $\Phi(f)$. Пусть, например, при наличии наложения спектр $\Phi_D(f)$ выглядит так, как показано на рис. 14, а. Тогда спектр непрерывного сигнала $\Phi(f)$ может иметь различные формы, и в частности такие, как показано на рис. 14, б и в.

Если при образовании спектра $\Phi_D(f)$ явление наложения отсутствует, то тогда по дискретному сиг-

налу $\Phi_d(t)$ можно однозначно восстановить непрерывный сигнал $\Phi(t)$. Действительно, подадим дискретный сигнал, имеющий спектр такой, как показано на рис. 11, б, на вход идеального фильтра, пропускающего без искажения основной спектр и полностью подавляющего дублирующие спектры. Тогда на выходе фильтра мы получим сигнал, имеющий спектр $\Phi(f)$, т. е., иначе говоря, исходный непрерывный сигнал.

Итак, для восстановления непрерывного сигнала по дискретному необходимо, чтобы отсутствовало наложение спектров. А для этого в свою очередь нужно, чтобы выполнялось условие $f_M \leq f_2/2$, где f_M — верхняя частотная граница спектра непрерывного сигнала, а f_2 — частота дискретизации. Это условие можно записать иначе

$$T_2 \leq \frac{1}{2f_M}. \quad (77)$$

Соотношение (77) лежит в основе теоремы отсчетов, которая может быть сформулирована следующим образом [6]: если наивысшая частота в спектре сигнала $\Phi(t)$ равна f_M , то сигнал $\Phi(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие по времени друг от друга не более чем на $1/(2f_M)$. Эта теорема носит также название теоремы Котельникова [6, 27] или теоремы Шеннона [21].

Ряд Котельникова. При выполнении условия (77) спектр непрерывного сигнала $\Phi(f)$ можно получить, умножая спектр дискретного сигнала $\Phi_d(f)$ на прямоугольную функцию в частотной области $\Pi(f, f_2)$:

$$\Phi(f) = \Phi_d(f) \Pi(f, f_2). \quad (78)$$

Функция $\Pi(f, f_2)$ имеет значение, равное единице в диапазоне от $-f_2/2$ до $f_2/2$ и равное нулю во всем остальном частотном диапазоне. График этой функции показан штриховой линией на рис. 11, б.

Умножению спектров соответствует свертка функций во временной области. Спектр $\Phi_d(f)$ относится к дискретной функции $\Phi_d(t)$. Спектр $\Pi(f, f_2)$, как следует из (31), — это спектр функции $(\sin \pi f_2 t) / (\pi t)$. Следовательно, можно записать:

$$\Phi(t) = \Phi_d(t) * \frac{\sin \pi f_2 t}{\pi t}. \quad (79)$$

Используя формулу (67) и раскрывая операцию свертки, получаем

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t') \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_2 \delta(t' - nT_2) \frac{\sin[\pi f_2(t - t')]}{\pi(t - t')} dt' = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT_2) \frac{\sin(\pi f_2 t - \pi n)}{\pi f_2 t - \pi n}.\end{aligned}\quad (80)$$

В соответствии с (80) функция $\varphi(t)$ может быть представлена бесконечным рядом, состоящим из функций $\text{sinc}(\pi f_2 t - \pi n)$ с амплитудами $\varphi(nT_2)$. Этот ряд

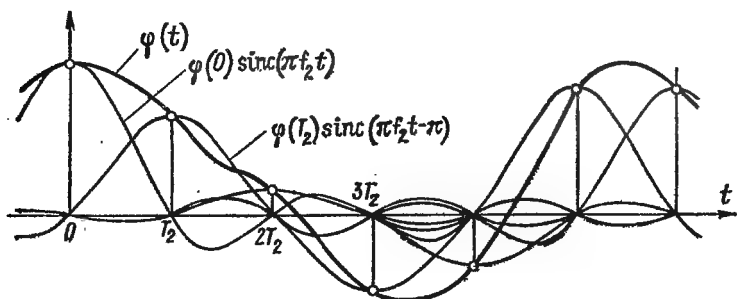


Рис. 15. Восстановление сигнала по Котельникову

носит название ряда Котельникова. Как указано в [16], в математической теории интерполяции подобные ряды впервые применил в 1915 г. Е. Т. Уиттакер. Возможность восстановления сигнала с ограниченным спектром с помощью такого ряда была показана В. А. Котельниковым в 1933 г.

Формирование сигнала $\varphi(t)$ суммированием бесконечного числа функций вида $\varphi(nT_2) \text{sinc}(\pi f_2 t - \pi n)$ поясняется рис. 15. Функция $\varphi(nT_2) \text{sinc}(\pi f_2 t - \pi n)$ равна нулю во всех точках $t = mT_2$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, за исключением точки $t = nT_2$. В точке же $t = nT_2$ эта функция равна $\varphi(nT_2)$. Таким образом, в каждой точке $t = nT_2$ только один член ряда, стоящего в правой части равенства (80), отличен от нуля и этот член равен $\varphi(nT_2)$. Следовательно, в точках $t = nT_2$ справедливость равенства (80) очевидна. Но в соответствии с этим равенством в промежутках между ука-

занными точками суммирование бесконечного числа функций $\varphi(nT_2) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t}{T_2} - \pi n\right)$ тоже обеспечивает абсолютно точное значение функции $\varphi(t)$.

Соотношения (77) и (80) показывают, каким путем можно при дискретизации сигнала сохранить всю информацию, содержащуюся в нем. Эти соотношения позволяют обоснованно выбрать частоту дискретизации и затем при желании по дискретным отсчетам полностью восстановить исходный сигнал.

Однако практически реализовать точное восстановление сигнала с помощью ряда Котельникова невозможно. Дело в том, что сигнал с ограниченным спектром — это сигнал, длящийся бесконечно долго. При дискретизации такого сигнала будет получено бесконечное число отсчетов $\varphi(nT_2)$. Для восстановления исходного значения сигнала $\varphi(t)$ в произвольный момент времени t нужно учитывать не только все отсчеты, предшествующие этому моменту, но и все последующие отсчеты. Иначе говоря, восстановление сигнала по Котельникову возможно только после получения всех отсчетов сигнала, что не представляется возможным ввиду неограниченной длительности сигнала.

Тем не менее, соотношения (77) и (80) могут использоваться для приближенного определения целесообразного интервала дискретизации T_2 и для приближенного восстановления сигнала по совокупности его дискретных отсчетов. В теоретическом же плане эти соотношения имеют фундаментальное значение.

Сравнение методов восстановления. При приближенном восстановлении непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам на практике чаще всего применяют линейную интерполяцию. Проведем краткое сравнение этого метода и метода восстановления с помощью ряда Котельникова.

Предположим, что при восстановлении сигнала нужно с заданной точностью воспроизвести все гармоники спектра вплоть до некоторой верхней частоты f_m . При использовании линейной интерполяции соединяют прямолинейными отрезками соседние дискретные точки на графике восстанавливаемой функции. Наибольшая погрешность при этом будет получена там, где модуль второй производной функции максимален. Для синусоиды наибольшая погрешность

будет наблюдаться в районах экстремумов. Если два соседних отсчета располагаются симметрично относительно точки экстремума, то линейный интерполирующий отрезок пройдет горизонтально и погрешность может быть найдена как разность между амплитудой синусоиды A и ее значением, соответствующим одному из этих двух отсчетов. Поэтому при линейной интерполяции наибольшая приведенная погрешность восстановления синусоиды с частотой f_M будет

$$\gamma_d = \frac{1}{A} \left[A - A \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi f_M \frac{T_2}{2} \right) \right] = 1 - \cos \frac{\pi}{N} \approx \frac{\pi^2}{2N^2}, \quad (81)$$

где $N = 1/(f_M T_2)$ — отношение периода синусоиды ($1/f_M$) к интервалу дискретизации T_2 (предполагается, что $N \gg 1$).

При заданной допустимой погрешности восстановления интервал дискретизации может быть найден по формуле

$$T_2 \leq \frac{\sqrt{2\gamma_d}}{\pi f_M} \approx \frac{\sqrt{\gamma_d}}{2,2 f_M}. \quad (82)$$

Отсюда следует, что при допустимой погрешности восстановления, равной 1 %, требуется 22 отсчета на один период синусоиды.

Итак, при линейной интерполяции с однопроцентной погрешностью восстановления наивысшей значимой гармоники спектра требуется устанавливать частоту дискретизации f_2 в 22 раза более высокой, чем частота этой гармоники. При восстановлении же по Котельникову частота дискретизации должна быть всего лишь в два раза больше частоты наивысшей гармоники, и при этом теоретически эта гармоника будет восстанавливаться без погрешности.

Но линейная интерполяция реализуется весьма просто технически, а кроме того, позволяет воспроизводить исходную кривую непосредственно в процессе эксперимента. Восстановление же по Котельникову, как уже указывалось, возможно только после получения всех точек исследуемой кривой. Именно поэтому и отдают предпочтение линейной интерполяции.

Преобразование Фурье (ПФ) — одна из самых распространенных процедур, применяемых при обработке сигналов. При выполнении ПФ требуется проводить интегрирование непрерывных функций. Цифровые вычислительные машины, используемые для обработки

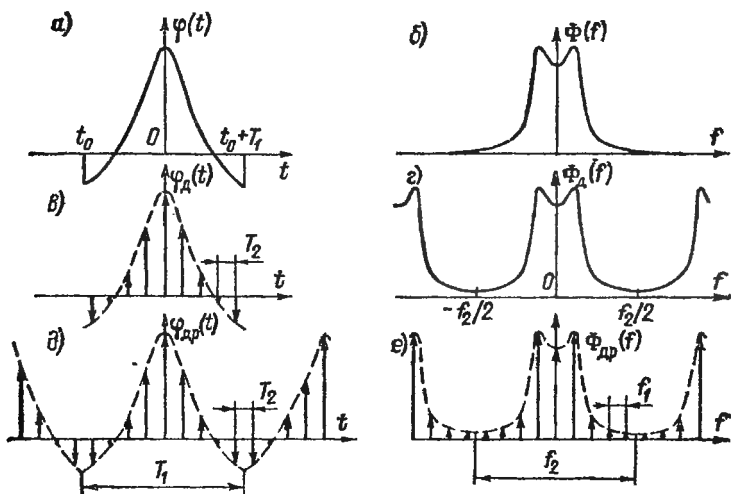


Рис. 16. Процесс перехода от непрерывного к дискретному преобразованию Фурье

сигналов, оперируют с дискретизированными функциями, а операцию интегрирования могут выполнять лишь приближенно на основе того или иного численного метода. В связи с этим был разработан вариант ПФ, названный дискретным преобразованием Фурье (ДПФ), при реализации которого обрабатываются дискретизированные значения сигнала и спектра и вместо интегрирования функции проводится суммирование ее дискретных значений.

Процесс перехода от ПФ к ДПФ поясняет рис. 16. Предположим, нам дан некоторый ограниченный по времени сигнал $\varphi(t)$ — рис. 16, а. Необходимо найти спектр этого сигнала $\Phi(f)$ — рис. 16, б. Проведем анализ сигнала $\varphi(t)$ по его дискретным значениям, отстоящим друг от друга на время T_2 (рис. 16, в). Подобный дискретный сигнал можно описать

соотношением

$$\varphi_d(t) = \varphi(t) T_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_2 - \alpha T_2), \quad (83)$$

где n — целое число, а α — коэффициент (в общем случае нецелый), показывающий положение нулевого δ -импульса на временной оси.

Дискретизация сигнала в соответствии с соотношением (72) приводит к тому, что амплитудный спектр сигнала бесконечно повторяется на частотной оси с периодом, равным $f_2 = 1/T_2$. В частности, когда α — целое число, спектр дискретизированного сигнала может выглядеть так, как показано на рис. 16, з.

Для того чтобы дискретизация не привела к потере информации, требуется согласно (77) выбирать интервал дискретизации T_2 меньшим полупериода наивысшей гармоники спектра f_M . Ограниченный по времени сигнал имеет не ограниченный по частоте спектр. Так что в данном случае $f_M = \infty$ и условие (77) принципиально не может быть выполнено. Однако спектр ограниченного по времени физического сигнала убывает с ростом модуля частоты, поэтому можно указать частоту f_{Me} , выше которой амплитуда функции $\Phi(f)$ пренебрежимо мала. Если выбрать $T_2 \leq 1/(2f_{Me})$, то тогда в диапазоне $-0,5f_2 < f < 0,5f_2$ спектр $\Phi_d(t)$ дискретизированного сигнала будет приближенно равен спектру $\Phi(f)$ непрерывного сигнала,

$$\Phi_d(f) \approx \Phi(f). \quad (84)$$

Итак, мы имеем дискретную непериодическую функцию $\varphi_d(t)$ во временной области (рис. 16, в) и непрерывную периодическую $\Phi_d(f)$ — в частотной (рис. 16, з). Для того чтобы получить также и в частотной области дискретную последовательность, продолжим периодически сигнал $\varphi_d(t)$ в обе стороны по временной оси (рис. 16, д). Установим период T_1 полученного таким образом сигнала $\varphi_{dp}(t)$ равным целому числу интервалов дискретизации:

$$T_1 = NT_2. \quad (85)$$

Кроме того, придадим коэффициенту α , входящему в (83), такое значение, чтобы номера отсчетов функции $\varphi_d(t)$ изменялись от 0 до $N-1$. Тогда ра-

венство (83) можно переписать следующим образом:

$$\Phi_d(t) = T_2 \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(nT_2 + \alpha T_2) \delta(t - nT_2 - \alpha T_2). \quad (86)$$

Дискретному периодическому сигналу $\Phi_{др}(t)$ соответствует дискретный периодический спектр $\Phi_{др}(f)$ — рис. 16, е.

Преобразование Фурье обратимо. Поэтому каждому свойству прямого преобразования соответствует дуальное свойство обратного преобразования. Это еще раз можно увидеть на примере кривых, показанных на рис. 16. Дискретному сигналу соответствует периодический спектр, периодическому сигналу — дискретный спектр, ну а если сигнал дискретный и периодический, то его спектр будет периодическим и дискретным.

В соответствии с формулой (42) можем записать

$$\Phi_{др}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1 \Phi_d(kf_1) \delta(f - kf_1). \quad (87)$$

Входящая в правую часть этого равенства функция $\Phi_d(kf_1)$ определяется исходя из формулы для коэффициента ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi_d(kf_1) &= C_k/f_1 = \int_{t_0}^{t_0+T_1} \Phi_d(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \\ &= T_2 \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(nT_2 + \alpha T_2) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)} \end{aligned} \quad (88)$$

При выводе этой формулы учитывались равенства (85) и (86).

Формула (88) представляет собой прямое дискретное преобразование Фурье. Из него следует, что площади δ -импульсов спектра $\Phi_{др}(f)$ могут быть найдены путем суммирования N отсчетов сигнала $\varphi(t)$ с соответствующими весами.

Перейдем теперь к обратному преобразованию Фурье. Используя (88), получим

$$\Phi_{др}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{др}(f) e^{j2\pi f t} df = f_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_d(kf_1) e^{j2\pi k f_1 t}. \quad (89)$$

В соответствии с (89) для обратного преобразования Фурье (ОПФ) нужно учесть бесконечное множество отсчетов спектра $\Phi_d(kf_1)$. Но эти отсчеты периодически повторяются. Поэтому, казалось бы, при вычислении ОПФ достаточно принять во внимание только один период спектра, т. е. N последовательных отсчетов. Кроме того, исходя из обратимости преобразования Фурье, мы вправе предположить, что прямому преобразованию (88), в котором суммируется N слагаемых, должно соответствовать такое же дуальное обратное преобразование. Покажем, что это действительно так.

Домножим левую и правую части равенства (88) на $e^{j \frac{2\pi}{N} k(i+\alpha)}$ и проведем суммирование по k в пределах от $k=0$ до $k=N-1$. Будем для краткости обозначать $\varphi(nT_2 + \alpha T_2) = \varphi(n)$ и $\Phi_d(kf_1) = \Phi_d(k)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k(i+\alpha)} = \\ & = \sum_{k=0}^{N-1} T_2 e^{j \frac{2\pi}{N} k(i+\alpha)} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)} \end{aligned}$$

Изменим очередность суммирования в правой части последнего соотношения:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Phi_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k(i+\alpha)} = T_2 \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(i-n)} \quad (90)$$

Поскольку выражение $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(i-n)}$ — это сумма геометрической прогрессии, применим для ее нахождения формулу (38). При $i \neq n$ получим

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(i-n)} = \frac{e^{j2\pi(i-n)} - 1}{e^{j \frac{2\pi}{N}(i-n)} - 1} = 0.$$

Если же $i = n$, то тогда все слагаемые в этой сумме будут равны единице и сама сумма будет равна N .

Таким образом, правая часть соотношения (90) отлична от нуля только при $n = i$. Действительно, при суммировании по n (внешняя сумма) только одно слагаемое, соответствующее $n = i$, будет отлично от

нуля. Поэтому равенство (90) можно привести к виду

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Phi_k(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k(i+\alpha)} = T_2 N \Phi(i).$$

Производя замену переменной $n=i$ и принимая во внимание равенство $T_2 N = 1/f_1$, окончательно получим формулу обратного дискретного преобразования Фурье

$$\varphi(nT_2 + \alpha T_2) = f_1 \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_k(kf_1) e^{j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)}.$$

Итак, подведем итог. Ограниченный по времени ($t_0 < t < t_0 + T_1$) сигнал $\varphi(t)$ и его спектр $\Phi(f)$ связаны между собой парой обычных преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt; \\ \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f t} df. \end{aligned}$$

Отсчеты функции $\varphi(t)$ и спектра $\Phi(f)$ (при условии, что приближенное равенство (84) выполняется достаточно точно) связаны в свою очередь парой дискретных преобразований Фурье

$$\Phi(kf_1) = T_2 \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(nT_2 + \alpha T_2) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)}; \quad (91)$$

$$\varphi(nT_2 + \alpha T_2) = f_1 \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(kf_1) e^{j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)}. \quad (92)$$

В равенства (91) и (92) входят отсчеты спектральной плотности $\Phi(kf_1)$. Перейдем к значениям спектра, соответствующим коэффициентам ряда Фурье для периодического сигнала $C_k = f_1 \Phi(kf_1)$. Введем также новые обозначения, обычно используемые в формулах ДПФ: $a(n) = \varphi(nT_2 + \alpha T_2)$ и $b(k) = C_k = f_1 \Phi(kf_1)$. Тогда из (91) и (92) получим более компактные соотношения:

$$b(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)}. \quad (93)$$

$$a(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)} \quad (94)$$

Часто начальный отсчет сигнала ($n=0$) совпадают с начальным моментом времени ($t=0$). В этом случае $\alpha=0$ и формулы прямого и обратного дискретных преобразований Фурье (ДПФ и ОДПФ) несколько упрощаются и приобретают почти симметричный вид:

$$b(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}; \quad (95)$$

$$a(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (96)$$

Несимметрия, как видим, состоит только в разных знаках показателей степени экспонент и в коэффициенте $1/N$, который входит в (95) и не входит в (96). Однако, следует заметить, что этот коэффициент не имеет принципиального значения. Изменяя содержание величин, обозначаемых символами $a(n)$ и $b(k)$, мы можем изменять соотношения (93) — (96). Часто, например, приводят формулы ДПФ, в которых коэффициент $1/N$ входит в обратное, а не прямое (как у нас) дискретное преобразование Фурье.

14. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДПФ

Свойства дискретного преобразования Фурье в значительной степени совпадают со свойствами обычного преобразования Фурье.

ДПФ суммы сигналов. Из линейности ДПФ вытекает, что линейной комбинации нескольких сигналов, заданных на одном и том же ограниченном временном промежутке, соответствует ДПФ, равное аналогичной линейной комбинации ДПФ этих сигналов. При этом предполагается, что дискретизация всех сигналов производится синхронно.

Если временные промежутки, в которых существуют анализируемые с помощью ДПФ сигналы, исходно не совпадают, то тогда можно искусственно продлить эти промежутки до совпадения, дополняя функции нулевыми значениями. Дополнение нулевыми значениями анализируемого сигнала целесообразно также тогда, когда нужно снизить интервал дискретизации спектра. Если сигнал задан N дискрет-

ными значениями, то тогда мы получаем N равноотстоящих значений спектра (рис. 17, а и б). В частности, при временном интервале дискретизации сигнала T_2 частотный интервал дискретизации его спектра будет равен f_2/N , где $f_2 = 1/T_2$. Если же дополнить сигнал еще нулевыми значениями, число которых равно M , то тогда мы получим $N + M$ значений спектра,

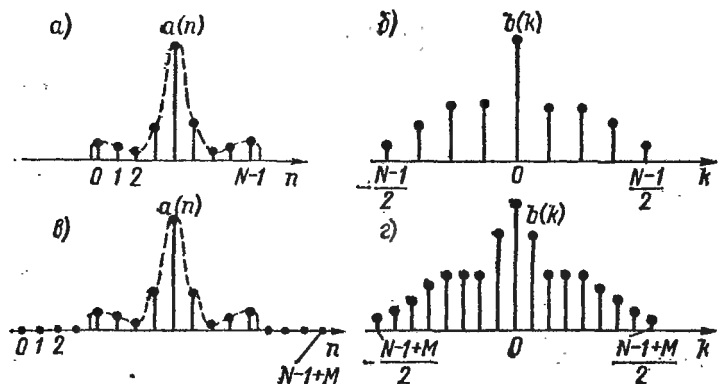


Рис. 17. Изменение ДПФ при дополнении дискретного сигнала нулевыми значениями

а частотный интервал дискретизации спектра будет равен $f_2/(N + M)$ — рис. 17, в и г. Отметим, что дополнение функции $a(n)$ нулевыми значениями не увеличивает информации об этой функции. Соответственно и получающийся при этом спектр с более частыми отсчетами не более информативен, чем исходный дискретный спектр. Как было показано выше (см. § 6), дискретный спектр периодического сигнала несет в себе всю информацию о сигнале и на его основе может быть найден непрерывный спектр непериодического сигнала, значения которого с точностью до постоянного коэффициента определяют площади δ -импульсов спектра периодического сигнала при любом увеличении его периода.

ДПФ произведения и свертки сигналов. По своей сути ДПФ, как мы видели, представляет собой спектр дискретизированного, периодически продолженного сигнала. Спектр произведения сигналов равен свертке их спектров. Соответственно и дискретное преобразование Фурье для произведения сигналов может быть

найденно исходя из свертки спектров дискретизированных и периодически продолженных сигналов.

Спектры таких сигналов также дискретны и периодичны. При свертке дискретных величин интеграл, присутствовавший в формуле непрерывной свертки, заменяется суммой. В общем случае дискретная свертка определяется формулой

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) * \varphi_2(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_1(m) \varphi_2(n-m) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_1(n-m) \varphi_2(m).\end{aligned}\quad (97)$$

Если сворачиваемые функции $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ периодичны и период их одинаков, то и свертка будет периодична с тем же периодом. Для нахождения такой свертки достаточно рассмотреть по одному периоду исходных функций и найти итоговую функцию также только для одного ее периода. Подобная свертка обычно называется круговой. Мы будем обозначать операцию круговой свертки звездочкой в кружке.

Итак, произведению дискретизированных и заданных на одном временном промежутке сигналов $a_1(n)$ и $a_2(n)$ соответствует дискретная круговая свертка их ДПФ $b_1(k)$ и $b_2(k)$:

$$\begin{aligned}a_1(n) a_2(n) &\rightleftharpoons b_1(k) \oplus b_2(k) = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} b_1(l) b_2(k-l) = \sum_{l=0}^{N-1} b_1(k-l) b_2(l).\end{aligned}\quad (98)$$

Так как $b_1(k)$ и $b_2(k)$ предполагаются периодически продолженными, то при отрицательном аргументе $k-l$ в (98) берется значение ДПФ b_1 или b_2 , соответствующее аргументу $k-l+N$. Можно представить значения последовательности $b_1(k)$ и $b_2(k)$ расположенными по кругу: после $(N-1)$ -го отсчета снова идет нулевой отсчет и т. д. Поэтому свертка и называется круговой.

Аналогичным образом нетрудно прийти к выводу, что ДПФ свертки двух периодически продолженных последовательностей $a_1(n)$ и $a_2(n)$ равно произведению их ДПФ. Иначе говоря, если $a(n)$ — это круговая свертка последовательностей $a_1(n)$ и $a_2(n)$:

$$a(n) = a_1(n) \oplus a_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a_1(m) a_2(n-m),$$

то ей соответствует произведение ДПФ этих последовательностей:

$$a_1(n) \otimes a_2(n) \rightleftharpoons b_1(k) b_2(k). \quad (99)$$

Однако здесь нужно сразу заметить, что круговая свертка двух дискретизированных сигналов — это совсем не то, что мы получили бы при дискретизации обычной свертки двух ограниченных по времени непрерывных сигналов. Если эти сигналы не продолжать периодически, то мы получим обычную линейную дискретную свертку. Учитывая, что каждый из сигналов представлен последовательностью N отсчетов, можем записать:

$$\begin{aligned} a_1(n) * a_2(n) &= \sum_{m=0}^n a_1(m) a_2(n-m) = \\ &= \sum_{m=0}^n a_1(n-m) a_2(m). \end{aligned} \quad (100)$$

В данном случае верхний индекс у суммы равен n , а не $N-1$, как было ранее при круговой свертке. Это как раз и есть следствие ограниченности сигналов по времени: мы предполагаем, что $a_1(n)$ и $a_2(n)$ при $n < 0$ и при $n > N-1$ равны нулю. Поэтому $a_2(n-m)$ или $a_1(n-m)$ при $m > n$ равны нулю. Соответственно и суммирование по m ведется в (100) в пределах от 0 до n .

На основании соотношения (99) и учитывая отличие круговой и линейной свертки, приходим к выводу, что в общем случае нельзя найти дискретизированный спектр свертки сигналов путем перемножения соответствующих ДПФ.

Однако при определенных условиях круговая свертка последовательностей $a_1(n)$ и $a_2(n)$ будет равна их линейной свертке. Для этого необходимо, чтобы при периодическом продолжении каждой из сворачиваемых последовательностей за группой ее значащих членов следовала группа нулевых членов, число которых по меньшей мере на единицу меньше числа значащих членов другой последовательности.

Пусть, например, последовательность $a_1(n)$ содержит N_1 членов (от 0 до N_1-1), а последовательность $a_2(n)$ — N_2 членов (от 0 до N_2-1). Линейная свертка этих последовательностей будет содержать $N_1 + N_2 - 1$ членов (от 0 до $N_1 + N_2 - 2$). Дополним

эти последовательности нулевыми значениями, так, чтобы число членов каждой из них стало равным $N_1 + N_2 - 1$. Линейная свертка от этого не изменится. А вот круговая свертка последовательностей теперь будет также содержать $N_1 + N_2 - 1$ членов и, как нетрудно убедиться, будет равна линейной свертке последовательностей $a_1(n)$ и $a_2(n)$.

В этом случае произведением соответствующих ДПФ $b_1(k)$ и $b_2(k)$ характеризуется последовательность отсчетов спектра непрерывного сигнала, равного свертке сигналов, представленных отсчетами $a_1(n)$ и $a_2(n)$.

Обратимость ДПФ. Так же как и обычное преобразование Фурье, ДПФ обратимо. Действительно, если в формулах (95) и (96) заменить переменные (поставить $-k$ и n соответственно вместо n и k), то получим соотношения, из которых следует, что если $b(k)$ — это ДПФ от $a(n)$, то $a(-k)$ с точностью до постоянного коэффициента тоже представляет собой ДПФ от $b(n)$. Поскольку при выводе формул ДПФ и ОДПФ мы использовали периодически продолженные последовательности, то изменение знака одного из аргументов при замене переменных (n на $-k$) просто означает перенумерацию членов последовательности: последний член последовательности делается первым, первый — последним и соответствующим образом изменяются номера других членов. Что касается постоянного коэффициента $1/N$, то, как уже указывалось, в формулах (95) и (96) он не имеет существенного значения.

ДПФ симметричных сигналов. В § 4 было показано, что преобразование Фурье четного сигнала представляет собой четную вещественную функцию частоты. Очевидно, что подобное свойство характерно и для ДПФ четного сигнала. Проверим это.

При выводе формул ДПФ мы рассматривали сигнал, ограниченный по длительности промежутком времени $t_0 < t < t_0 + T_1$ (см. рис. 16, а). Будем располагать отсчеты сигнала симметрично относительно середины этого промежутка и примем $t_0 = -T_1/2$. В этом случае при интервале дискретизации $T_2 = T_1/N$ начальный отсчет будет соответствовать времени $t = -(T_1 - T_2)/2$. А это означает, что коэффициент α , присутствующий в (83) и последующих формулах, в данном случае равен $-(N - 1)/2$.

Соответственно формулы прямого и обратного ДПФ (93) и (94) примут вид

$$b(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j \frac{\pi}{N} k (2n-N+1)}; \quad (101)$$

$$a(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) e^{j \frac{\pi}{N} k (2n-N+1)}. \quad (102)$$

Если $a(n)$ — четно-симметричная относительно своей середины последовательность, то

$$a(n) = a(N-1-n). \quad (103)$$

С учетом этого соотношения нетрудно получить соответствующие формулы ДПФ и ОДПФ. Эти формулы вместе с поясняющими рисунками помещены в табл. 1.

Как видим, подобно обычному преобразованию Фурье, ДПФ четных функций представляет собой действительную четную последовательность отсчетов спектра $b(k)$. Кроме того, для этой последовательности справедливо соотношение $|b(k)| = |b(N-k)|$.

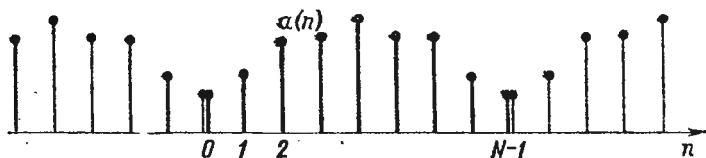


Рис. 18. Периодическое продолжение симметричного дискретного сигнала с совмещением крайних отсчетов

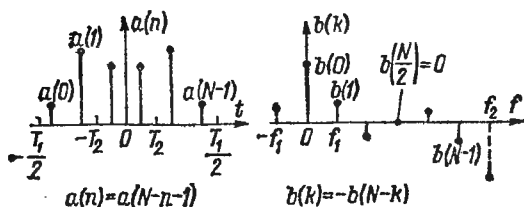
Для четно-симметричного сигнала можно вывести еще один вариант формул ДПФ. Установим интервал дискретизации T_2 равным $T_1/(N-1)$, где T_1 — длительность сигнала, и по-прежнему будем располагать отсчеты сигнала симметрично относительно середины промежутка T_1 . В этом случае отсчеты $a(0)$ и $a(N-1)$ будут соответствовать границам этого временного промежутка. При периодическом продолжении последовательности $a(n)$ крайние отсчеты соседних периодов совместятся друг с другом (рис. 18). Это приведет к удвоению значений отсчетов в точках совмещения. Если учесть этот факт, то можно вывести соответствующие формулы ДПФ и ОДПФ, которые вместе с поясняющими рисунками помещены в табл. 2.

Таблица 1. Дискретное преобразование Фурье симметричных сигналов при интервале дискретизации T_2 , в N раз меньшем длительности сигнала T_1

$$T_2 = \frac{T_1}{N}; N - \text{четно}$$

$$b(k) = (-1)^k \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a(n) \cos \frac{\pi k (2n+1)}{N}, \quad (104)$$

$$a(n) = b(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^k b(k) \cos \frac{\pi k (2n+1)}{N}. \quad (105)$$



$$T = \frac{T_1}{N}; N - \text{нечетно}$$

$$b(k) = \frac{1}{N} \left[2 (-1)^k \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} a(n) \cos \frac{\pi k (2n+1)}{N} + a\left(\frac{N-1}{2}\right) \right], \quad (106)$$

$$a(n) = b(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^k b(k) \cos \frac{\pi k (2n+1)}{N}. \quad (107)$$

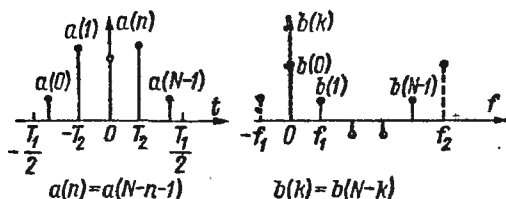
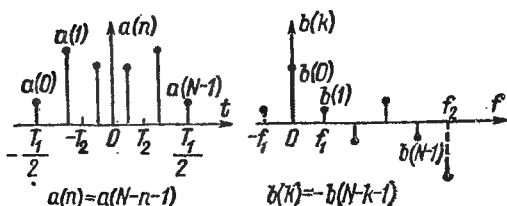


Таблица 2. Дискретное преобразование Фурье симметричных сигналов при интервале дискретизации T_2 , в $N-1$ раз меньшем длительности сигнала T_1

$$T_2 = \frac{T_1}{N-1}; \quad N - \text{четно}$$

$$b(k) = \frac{(-1)^k}{N-1} \left[a(0) + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} a(n) \cos \frac{2\pi kn}{N-1} \right], \quad (108)$$

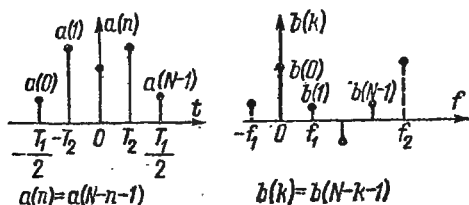
$$a(n) = b(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^k b(k) \cos \frac{2\pi kn}{N-1}. \quad (109)$$



$$T_2 = \frac{T_1}{N-1}; \quad N - \text{нечетно}$$

$$b(k) = \frac{(-1)^k}{N-1} \left[a(0) + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-3}{2}} a(n) \cos \frac{2\pi kn}{N-1} \right] + \frac{1}{N-1} a\left(\frac{N-1}{2}\right), \quad (110)$$

$$a(n) = b(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-3}{2}} (-1)^k b(k) \cos \frac{2\pi kn}{N-1} + (-1)^n b\left(\frac{N-1}{2}\right). \quad (111)$$



Формулы, приведенные в табл. 1 и 2, соответствуют совмещению начального момента времени с серединой сигнала ($t_0 = -T_1/2$). Можно совместить начальный момент времени с началом сигнала ($t_0 = 0$). В этом случае в формулах (93) и (94) следует принять $\alpha = 0,5$. В результате для четно-симметричных сигналов можем найти новые формулы ДПФ, которые, вообще говоря, могут быть получены из формул (104) и (111) путем замены $b(k)$ на $(-1)^k b(k)$.

В частности, при четных N эти формулы будут иметь вид для $T_2 = T_1/N$

$$b(k) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a(n) \cos \frac{\pi k (2n+1)}{N}; \quad (112)$$

$$a(n) = b(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} b(k) \cos \frac{\pi k (2n+1)}{N}; \quad (113)$$

для $T_2 = T_1/(N-1)$

$$b(k) = \frac{1}{N-1} \left[a(0) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a(n) \cos \frac{2\pi kn}{N-1} \right]; \quad (114)$$

$$a(n) = b(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} b(k) \cos \frac{2\pi kn}{N-1}. \quad (115)$$

При анализе спектров дискретизированных четных сигналов с успехом может использоваться любое из полученных выше соотношений (104) — (115).

В качестве примера определим ДПФ функции Хэмминга $\varphi(t) = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi t/T_1)$, где t изменяется в диапазоне от $-T_1/2$ до $T_1/2$. Будем определять $a(n)$ из соотношения $a(n) = \varphi(t_n)$, где $t_n = (2n+1-N)T_1/(2N)$ для случая, когда $T_2 = T_1/N$, и $t_n = (2n+1-N)T_1/(2N-2)$ для случая, когда $T_2 = T_1/(N-1)$. Тогда, принимая, например, $N=8$ или $N=7$, при использовании любой из формул (для соответствующего N) (104), (106), (110) получим $b(0) = 0,54$; $b(1) = 0,23$; $b(2) = 0$. Напомним, что значения $b(k)$ пропорциональны отсчетам спектра: $b(k) = f_1 \Phi(kf_1)$. Так как частота $f_1 = 1/T_1$ в нашем

случае не изменяется при переходе от одной формулы к другой, а отсчеты соответствуют одной и той же функции $\varphi(t)$, то естественно, что мы получили одинаковые отсчеты $b(k)$ для всех вариантов ДПФ.

15. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Дискретное преобразование Фурье довольно часто применяется при цифровой обработке информации. Поэтому важным фактором начинает выступать время реализации алгоритма ДПФ на имеющейся в распоряжении исследователя вычислительной машине. Особенно большое значение этот фактор приобретает при увеличении числа отсчетов анализируемого сигнала N . Действительно, в соответствии с формулой (95)

$$Nb(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad (116)$$

так что для определения N значений последовательности $Nb(k)$ требуется произвести примерно N^2 умножений и N^2 сложений [точнее, $(N-1)^2$ умножений и $N(N-1)$ сложений]. Таким образом, с ростом N непропорционально быстро возрастает время расчета ДПФ на ЭВМ. Такое положение наблюдается и при расчете ОДПФ.

Идея быстрого дискретного преобразования Фурье (его обычно называют просто — быстрое преобразование Фурье — БПФ) заключается в следующем. Последовательность $a(n)$ длиной N разбивают на две последовательности $a_1(n)$ и $a_2(n)$ длиной $N/2$ каждая и находят для них ДПФ соответственно $b_1(k)$ и $b_2(k)$. Естественно, что число N при этом предполагается четным. Затем по значениям $b_1(k)$ и $b_2(k)$ определяют N -точечное ДПФ $b(k)$. Если эта последняя операция не потребует много времени, то тогда можно ожидать сокращения общей длительности вычислений. Действительно, обычным методом два ДПФ по $N/2$ точек можно найти заметно быстрее, чем одно N -точечное ДПФ, так как $(N/2)^2 + (N/2)^2 < N^2$. Подобным образом можно пойти и дальше: разделить пополам каждую из последовательностей $a_1(n)$ и $a_2(n)$, найти для них свои ДПФ и далее искать ДПФ $b_1(k)$ и $b_2(k)$, исходя из этих частных ДПФ.

Очевидно, что такое деление можно проводить до тех пор, пока мы не получим последовательности, каждая из которых будет состоять всего из двух членов. При этом, конечно, нужно выбрать исходно число точек N равным целой степени числа 2.

Существуют разные алгоритмы БПФ, различающиеся методом разделения последовательности $a(n)$ на части. Рассмотрим один из них. Выделим четные члены последовательности $a(n)$ в одну группу $a_1(n)$, а нечетные — в другую $a_2(n)$. Тогда в соответствии с формулой (116) можем записать:

$$\begin{aligned} Nb(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[a(2n) e^{-j \frac{2\pi}{N} k 2n} + a(2n+1) e^{-j \frac{2\pi}{N} k (2n+1)} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a_1(n) e^{-j \frac{2\pi}{N/2} kn} + e^{-j \frac{2\pi}{N} k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a_2(n) e^{-j \frac{2\pi}{N/2} kn} = \\ &= \frac{N}{2} [b_1(k) + E_N^k b_2(k)], \end{aligned} \quad (117)$$

где $E_N^k = e^{-j \frac{2\pi}{N} k}$

Соотношение (117) показывает, что нахождение ДПФ $b(k)$ по ДПФ $b_1(k)$ и $b_2(k)$ — операция достаточно простая. При использовании этого соотношения следует иметь в виду, что отсчеты ДПФ периодически повторяются, так что

$$b_1\left(\frac{N}{2} + k\right) = b_1(k),$$

$$b_2\left(\frac{N}{2} + k\right) = b_2(k).$$

Учитывая, что для множителя E_N^k справедливо соотношение $E_N^{k+N/2} = -E_N^k$, получаем из (117)

$$Nb(k + N/2) = \frac{N}{2} [b_1(k) - E_N^k b_2(k)]. \quad (118)$$

Формулы (117), (118) отражают суть рассматриваемого алгоритма БПФ.

Для графического изображения алгоритмов БПФ можно воспользоваться заимствованным из [24] условным обозначением, показанным на рис. 19, а. С использованием этого обозначения на рис. 19, б пока-

зан алгоритм восьмиточечного БПФ. Приняв какие-то конкретные значения $a(0), \dots, a(7)$, нетрудно на

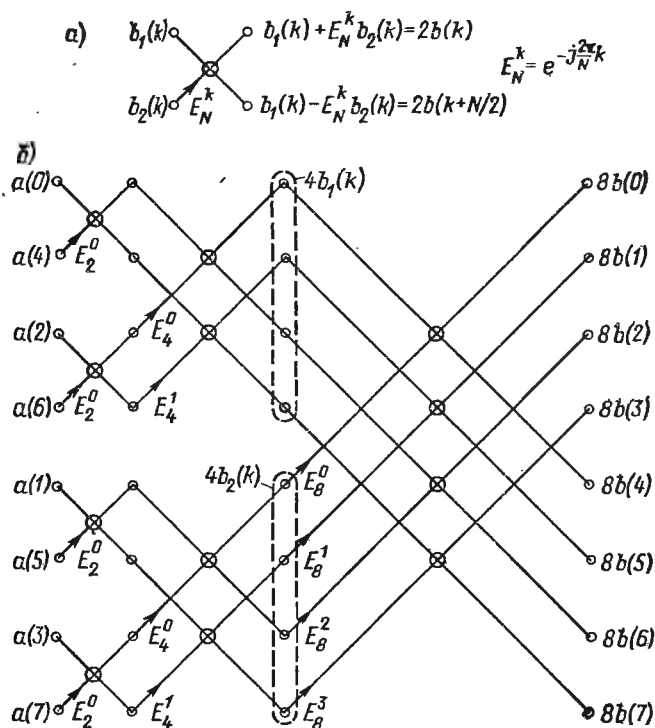


Рис. 19. Условное обозначение одного преобразования (а) и возможный алгоритм быстрого преобразования Фурье (б)

собственном опыте убедиться, насколько легче найти значения $b(0), \dots, b(7)$ по этому алгоритму, чем непосредственно по формуле (116).

16. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Как уже упоминалось в § 2, при анализе линейных систем наряду с преобразованием Фурье широко используется преобразование Лапласа. Найдем преобразование Лапласа для дискретной функции

$$\varphi_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(nT_2) T_2 \delta(t - nT_2).$$

В соответствии с формулой (14)

$$\Phi_d(p) = \int_0^{\infty} \varphi_d(t) e^{-pt} dt = T_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(nT_2) e^{-npT_2}, \quad (119)$$

где $p = c + j2\pi f$ — комплексная переменная.

Будем для краткости использовать запись $\varphi(nT_2) = \varphi(n)$ и введем обозначение

$$z = e^{pT_2}$$

Тогда соотношение (119) можно привести к виду

$$\Phi(z) = \Phi_d(z)/T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) z^{-n}. \quad (120)$$

Формула (120) определяет одностороннее Z -преобразование последовательности $\varphi(n)$. Это преобразование широко используется при анализе и синтезе дискретных систем, и в частности цифровых фильтров.

Тот факт, что используется именно одностороннее преобразование, практически не сужает круга рассматриваемых функций. Для дискретных функций, с которыми приходится иметь дело в технике, обычно можно установить такую нумерацию отсчетов, при которой обеспечивается выполнение условия $\varphi(n) = 0$ при $n < 0$. В этом случае одностороннее преобразование ($0 \leq n < \infty$) не отличается от двухстороннего ($-\infty < n < \infty$).

Z -преобразование подобно преобразованию Фурье обладает свойством линейности, так что линейной комбинации дискретных функций соответствует такая же линейная комбинация их Z -преобразований.

Если функцию (119) подвергнуть преобразованию Фурье, то мы получим формулу спектральной плотности

$$\Phi_d(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_d(t) e^{-j2\pi ft} dt = T_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(nT_2) e^{-j2\pi fnT_2}. \quad (121)$$

Сравнивая (120) и (121), нетрудно установить правило нахождения спектральной плотности дискретного сигнала по его Z -преобразованию:

$$\Phi_d(f) = T_2 \Phi(z) \big|_{z=e^{j2\pi fT_2}}. \quad (122)$$

В соотношения (119)—(122) входит размерный коэффициент T_2 . Благодаря этому коэффициенту мы получаем правильную размерность спектральной плотности сигнала. Отметим, что этот коэффициент может иметь численное значение, не обязательно совпадающее с длительностью интервала дискретизации. Более того, этот коэффициент часто просто опускают, т. е. принимают его равным единице. Но в этом случае подстановка $z = e^{j2\pi f T_2}$ в выражение Z -преобразования по формуле (122) приводит к функции, пропорциональной спектральной плотности, но с размерностью, совпадающей с размерностью исходной функции $\varphi_d(t)$.

Как мы знаем, свертке сигналов соответствует произведение спектров. Аналогичным образом свертке дискретных функций соответствует произведение их Z -преобразований [24].

Пусть Z -преобразования функций $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ равны соответственно $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$. Свертка дискретных функций в общем случае определяется формулой (97):

$$\varphi(n) = \varphi_1(n) * \varphi_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_1(m) \varphi_2(n-m).$$

Однако в данном случае, как уже указывалось, рассматриваются функции $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$, которые при отрицательных значениях аргумента равны нулю: если $n < 0$, то $\varphi_1(n) = 0$ и $\varphi_2(n) = 0$. Для таких функций пределы суммирования при вычислении свертки должны быть ограничены значениями, при которых аргументы m и $n-m$ не отрицательны. Следовательно, суммирование следует вести в пределах от $m = 0$ до $m = n$:

$$\varphi(n) = \varphi_1(n) * \varphi_2(n) = \sum_{m=0}^n \varphi_1(m) \varphi_2(n-m). \quad (123)$$

Для определенной таким образом дискретной функции $\varphi(n)$ Z -преобразование, как нетрудно доказать, равно произведению Z -преобразований $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$:

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) \Phi_2(z). \quad (124)$$

Рассмотрим, как изменяется преобразование дискретной функции при ее задержке на один такт.

Пусть $\varphi_2(n) = \varphi_1(n-1)$. Тогда

$$\Phi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(n-1) z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} \varphi_1(m) z^{-(m+1)}.$$

Если $\varphi_1(-1) = 0$, то тогда из последнего соотношения следует, что задержанной на один такт функции соответствует Z -преобразование

$$\Phi_2(z) = z^{-1} \Phi_1(z). \quad (125)$$

Таким образом, в области Z -преобразований символ z^{-1} можно рассматривать как символ задержки дискретного сигнала на один такт.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫМИ ЦЕПЯМИ И ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФИЛЬТРАХ

17. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПЬЮ

Преобразование непрерывных сигналов в линейных цепях с постоянными параметрами может быть описано с помощью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Результатом интегрирования и дифференцирования гармонической функции некоторой частоты являются также гармонические функции той же частоты. Поэтому при подаче на вход линейной цепи гармонического сигнала

$$x(t) = A_x e^{j(2\pi f t + \psi_x)}$$

на выходе цепи будет получен гармонический сигнал, отличающийся от входного лишь амплитудой и фазой:

$$y(t) = A_y e^{j(2\pi f t + \psi_y)}. \quad (126)$$

Отношение выходного сигнала цепи к входному гармоническому сигналу произвольной частоты носит название частотной характеристики (ЧХ) $G(f)$:

$$G(f) = \frac{y(t)}{x(t)} \Big|_{x(t) = A_x e^{j(2\pi f t + \psi_x)}} \quad (127)$$

Объединяя (126) и (127), получим

$$G(f) = \frac{A_y}{A_x} e^{j(\psi_y - \psi_x)} = |G(f)| e^{j\psi(f)}, \quad (128)$$

где $\psi(f) = \psi_y - \psi_x$. Модуль частотной характеристики $|G(f)|$ носит название амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), а ее аргумент $\psi(f)$ — фазо-частотной характеристики (ФЧХ).

Если на вход цепи подается некоторое произвольное воздействие $x(t)$, оно может быть разложено на гармонические составляющие с помощью преобразования Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Некоторая гармоника $x_f(t)$ частоты f , входящая в этот сигнал, имеет вид

$$x_f(t) = X(f) df e^{j2\pi f t}.$$

Пройдя через линейную цепь, имеющую ЧХ $G(f)$, гармоника преобразуется в гармонику выходного сигнала

$$y_f(t) = x_f(t) G(f) = X(f) G(f) df e^{j2\pi f t}. \quad (129)$$

Из (129) следует, что спектр выходного сигнала $Y(f)$ равен произведению спектра входного сигнала цепи и ее частотной характеристики

$$Y(f) = X(f) G(f). \quad (130)$$

При использовании преобразования Лапласа соотношение изображений выходного и входного сигналов описывается известной формулой, аналогичной (130):

$$Y(p) = X(p) G(p), \quad (131)$$

где $G(p)$ — передаточная функция цепи.

Во временной области выходной сигнал цепи $y(t)$ может быть найден исходя из (130) с помощью

обратного преобразования Фурье

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (132)$$

Таким образом, зная ЧХ линейной цепи, можно найти описание выходного сигнала цепи вначале в частотной области, а затем и во временной.

Рассмотрим теперь соотношения, позволяющие непосредственно находить временное описание сигнала.

Спектр δ -импульса (функции Дирака) в соответствии с (32) равен единице. Если такой δ -импульс подать на вход цепи, то тогда $X_{\delta}(f) = 1$ и в соответствии с формулой (130) получим

$$Y_{\delta}(f) = G(f). \quad (133)$$

Таким образом, ЧХ цепи можно найти как спектр выходного сигнала цепи при подаче на ее вход δ -импульса с единичной площадью. Реакция цепи $g(t)$ на δ -импульс $\delta(t)$ носит название импульсной характеристики (ИХ). В соответствии со (133) спектр этой функции равен ЧХ цепи. Отсюда следует, что импульсная и частотная характеристики линейной цепи связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df; \quad (134)$$

$$G(f) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (135)$$

В физически реализуемых системах реакция на некоторое входное воздействие не может начинаться ранее начала этого воздействия. Поэтому реакция на импульс $\delta(t)$, действующий при $t=0$, будет равна нулю при $t < 0$:

$$g(t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (136)$$

В связи с этим нижний предел интегрирования в формуле ПФ (135) принят равным нулю (а не минус бесконечности).

Как мы знаем, перемножение спектров соответствует свертке функций во временной области. Поэтому из равенства (130), определяющего спектр сиг-

нала на выходе линейной цепи, следует, что выходной сигнал цепи может быть найден в виде свертки входного сигнала и импульсной характеристики цепи:

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^t x(t') g(t - t') dt'. \quad (137)$$

Последнее соотношение показывает, что функция $g(t)$ определяет веса, с которыми входят в выходной

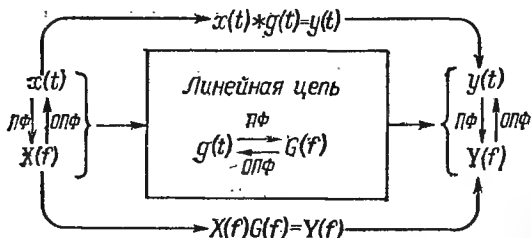


Рис. 20. Преобразование сигнала линейной цепью

сигнал $y(t)$ различные мгновенные значения входного сигнала $x(t)$. Поэтому импульсную характеристику часто называют весовой функцией (ВФ).

В соответствии с формулой (136) $g(t - \tau) = 0$ при $\tau > t$. Поэтому верхний предел интегрирования в правой части соотношения (137) принят равным t , а не бесконечности. Свертка, входящая в (137), может быть записана по-другому, что дает еще одну формулу для определения выходного сигнала линейной цепи:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - t') g(t') dt'. \quad (138)$$

Итак, динамические свойства линейной цепи полностью определяются одной из двух характеристик: частотной характеристикой или импульсной. Одна из них может быть найдена из другой по формулам преобразования Фурье (134) и (135). Преобразование сигнала линейной цепью можно рассматривать как в частотной области — формула (130), так и во временной — формула (136). Связи между входным и выходным сигналами во временной и в частотной областях схематически показаны на рис. 20.

Рассмотрим простой пример по определению параметров сигнала на выходе интегрирующей RC -цепи (рис. 21, а). По своим динамическим свойствам эта

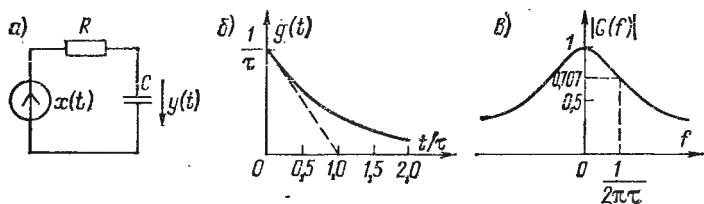


Рис. 21. Пример линейной цепи (а), ее импульсная (б) и амплитудно-частотная (в) характеристики

цепь эквивалентна инерционному звену первого порядка.

Частотная характеристика (ЧХ) этой цепи может быть найдена как комплексный коэффициент передачи делителя, одно плечо которого имеет сопротивление R , а второе — сопротивление $1/(j2\pi fC)$:

$$G(f) = \frac{1/(j2\pi fC)}{R + 1/(j2\pi fC)} = \frac{1}{j2\pi f\tau + 1} \quad (139)$$

График АЧХ рассматриваемой цепи приведен на рис. 21, в. Поскольку ИХ и ЧХ связаны между собой парой преобразований Фурье, то из (139) можно найти импульсную характеристику цепи.

В данном случае импульсная характеристика описывается выражением

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (140)$$

где $\tau = RC$ — постоянная времени цепи. Напомним, что для физически реализуемых систем $g(t) = 0$ при $t < 0$, так что соотношение (140) справедливо только при $t \geq 0$. Формулу (140) нетрудно также получить, если учесть, что $g(t)$ — это реакция цепи на входное воздействие в виде δ -импульса с единичной площадью. График функции $g(t)$ приведен на рис. 21, б.

Пусть на входе цепи действует прямоугольный импульс единичной амплитуды (рис. 22, а) $x(t) = \Pi(t - T_n/2, T_n)$.

Пользуясь формулой свертки (137), запишем

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \Pi\left(t' - \frac{T_n}{2}, T_n\right) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'. \quad (141)$$

Очевидно, что при $t < 0$ $y(t) = 0$. Для промежутка времени $0 \leq t < T_n$, совпадающего с временем дей-

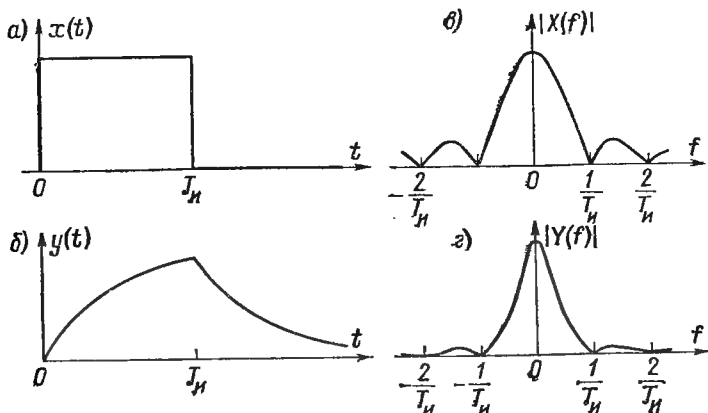


Рис. 22. Входной (а) и выходной (б) сигналы интегрирующей цепи и их амплитудные спектры (в и г)

ствия входного импульса, $x(t) = 1$ и выходной сигнал определяется формулой

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если же $t \geq T_n$, то тогда из (141) находим

$$y(t) = \int_0^{T_n} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{\frac{T_n}{\tau}} - 1 \right).$$

На рис. 22, б показан график выходного сигнала для рассматриваемого случая.

Спектр выходного сигнала можно найти как преобразование Фурье от $y(t)$:

$$Y(f) = \int_0^{T_n} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{T_n}^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(e^{\frac{T_n}{\tau}} - 1 \right) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Однако проще найти $Y(f)$ по формуле (130) как произведение спектра входного сигнала и ЧХ цепи. Учитывая (16), (26) и (139), получим

$$Y(f) = e^{-j\pi f T_n} \frac{\sin(\pi f T_n)}{\pi f} \frac{1}{j2\pi f \tau + 1}.$$

Графики модулей спектров входного и выходного сигналов показаны на рис. 22, в и г.

Преобразование дискретных сигналов в линейных цепях описывается в принципе теми же соотношениями, что и преобразования непрерывных сигналов. Отличия заключаются лишь в том, что в случае дискретного сигнала соответствующий интеграл вырождается в сумму.

Пусть, например, входной сигнал описывается формулой

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) T_2 \delta(t - nT_2).$$

Тогда выходной сигнал цепи, имеющей импульсную характеристику $g(t)$, может быть найден согласно (137) по формуле

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) T_2 \delta(t' - nT_2) \right] g(t - t') dt' = \\ &= \sum_{n=-\infty}^N x(n) T_2 g(t - nT_2), \end{aligned} \quad (142)$$

где N равно отношению t/T_2 , округленному до ближайшего меньшего целого значения.

Следует обратить внимание на тот факт, что при дискретном входном сигнале выходной сигнал цепи в общем случае имеет непрерывный характер.

В качестве примера рассмотрим случай, когда на вход интегрирующей RC -цепи (рис. 21, а) подан входной сигнал $x(t) = T_2 \text{Ш}_3(t - T_2, T_2)$. Такой сигнал содержит три δ -импульса, расположенные на временной оси в точках $t = 0, T_2, 2T_2$ (рис. 23, а). В соот-

ветствии с формулой (142) получим

$$y(t) = 0 \quad \text{при } t < 0;$$

$$y(t) = \frac{T_2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{при } 0 \leq t < T_2;$$

$$y(t) = \frac{T_2}{\tau} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t-T_2}{\tau}} \right) \quad \text{при } T_2 \leq t < 2T_2;$$

$$y(t) = \frac{T_2}{\tau} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t-T_2}{\tau}} + e^{-\frac{t-2T_2}{\tau}} \right) \quad \text{при } t \geq 2T_2.$$

График выходного сигнала, описываемого этими соотношениями, показан на рис. 23, б.

Наряду с цепями, имеющими непрерывную импульсную характеристику (непрерывными цепями),

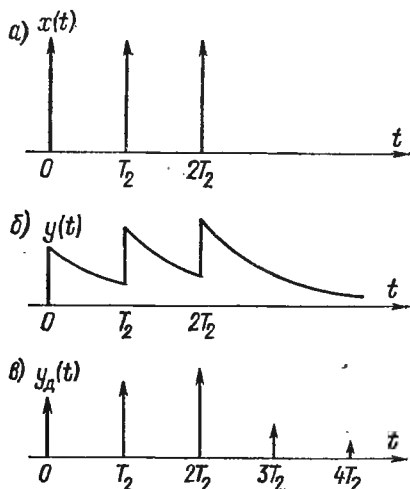


Рис. 23. Выходной дискретный сигнал (а) и выходные сигналы непрерывной (б) и дискретной (в) цепи

существуют цепи, имеющие дискретную импульсную характеристику (дискретные цепи). Дискретная цепь может быть представлена в виде последовательного соединения непрерывной цепи и дискретизатора.

При рассмотрении дискретной цепи в принципе нужно учитывать только отсчеты входного и выходного сигналов, соответствующие моментам дискретизации. Если анализировать дискретную цепь с помощью формул, выведенных для непрерывных цепей,

то тогда эти отсчеты следует понимать как площади входных и выходных δ -импульсов. Однако можно поступить и по-другому: вывести формулы, которые будут предназначены специально для дискретных сигналов и цепей. В этом случае нет нужды рассматривать отсчеты сигналов как площади δ -импульсов. Подобная ситуация нам уже встречалась при выводе формул дискретного преобразования Фурье. В конечном виде формулы ДПФ оперируют с последовательностями $a(n)$ и $b(k)$ и совсем не обязательно рассматривать эти последовательности как последовательности δ -импульсов.

Точно так же и при анализе прохождения дискретных сигналов через дискретные цепи можно оперировать просто со входными отсчетами $x(n)$ и выходными $y(n)$.

Будем рассматривать простейший и наиболее употребимый случай, когда дискретизация входных и выходных сигналов производится синхронно. Определим по формуле (142) значения выходного сигнала непрерывной системы в моменты времени $t = nT_2$:

$$y(nT_2) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) T_2 g(nT_2 - mT_2).$$

Запишем это соотношение в виде

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) g(n - m), \quad (143)$$

где $y(n) = y(nT_2)$, а $g(n - m)$ — безразмерная дискретная импульсная характеристика, которая в данном случае пропорциональна отсчетам импульсной характеристики $g(t)$ непрерывной цепи, положенной в основу рассматриваемой дискретной цепи:

$$g(n) = T_2 g(nT_2). \quad (144)$$

Формула (143) является основным соотношением, применяемым для определения последовательности выходных отсчетов $y(n)$ при известной последовательности входных отсчетов $x(n)$ дискретной цепи. Нетрудно увидеть, что эта формула описывает дискретную свертку двух последовательностей $x(n)$ и $g(n)$, причем $g(n)$ при отрицательном значении аргумента n равна нулю. Вторая форма записи этой свертки

имеет вид

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(n-m) g(m). \quad (145)$$

Соотношения (143) и (145) — это два варианта одной и той же формулы, и любая из них может применяться при рассмотрении дискретных цепей.

При анализе дискретных цепей часто используют Z -преобразование. Спектр выходного сигнала, как мы знаем, равен произведению спектра входного сигнала и ЧХ цепи (это, естественно, справедливо и для дискретных цепей). Отсюда нетрудно прийти к формуле, определяющей Z -преобразование выходного сигнала системы

$$Y(z) = X(z) G(z), \quad (146)$$

где $X(z)$ и $G(z)$ — Z -преобразования соответственно входного сигнала и импульсной характеристики системы (так как мы рассматриваем одностороннее Z -преобразование, то предполагается, что $x(n) = 0$ при $n < 0$).

Рассмотрим пример дискретной цепи, состоящей из непрерывной интегрирующей RC -цепи (рис. 21, а) и дискретизатора, работающего с тактом T_2 . В соответствии с формулой (144) для такой цепи получим

$$g(n) = \frac{T_2}{\tau} e^{-\frac{nT_2}{\tau}}. \quad (147)$$

Так как $g(t) = 0$ при $t < 0$, то и $g(n) = 0$ при $n < 0$; поэтому в формуле (147) предполагается $n \geq 0$. Пусть на вход рассматриваемой цепи подан сигнал $\Pi_3(t - T_2, T_2)$ — рис. 23, а. Тогда по формуле (143) найдем

$$y(0) = \frac{T_2}{\tau}; \quad y(1) = \frac{T_2}{\tau} \left(e^{-\frac{T_2}{\tau}} + 1 \right);$$

$$\text{при } n \geq 2 \quad y(n) = \frac{T_2}{\tau} \left(e^{-\frac{2T_2}{\tau}} + e^{-\frac{T_2}{\tau}} + 1 \right) e^{-\frac{(n-2)T_2}{\tau}}.$$

Сигнал $y(n)$ на выходе дискретной цепи, определяемый этими соотношениями, показан на рис. 23, в.

Решим теперь данный пример с помощью Z -преобразования. Найдем Z -преобразование входной последовательности

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2}. \quad (148)$$

Исходя из (147), с помощью формулы (38) определяем Z -изображение импульсной характеристики

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_2}{\tau} e^{-\frac{nT_2}{\tau}} z^{-n} = \frac{T_2}{\tau} \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}} z^{-1}}. \quad (149)$$

Перемножая (148) и (149), получаем Z -изображение выходной последовательности

$$Y(z) = X(z) G(z) = \frac{T_2}{\tau} \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}} z^{-1}}. \quad (150)$$

По изображению $Y(z)$ с помощью таблицы соответствий z -преобразования [13] можно определить $y(n)$. Естественно, мы получим последовательность, уже найденную нами с помощью дискретной свертки.

Из (150) нетрудно найти спектр выходного сигнала. Для этого согласно (122) используем подстановку $z = e^{j2\pi f T_2}$. В результате получим

$$Y(f) = T_2 Y(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f T_2}} = \frac{T_2^2}{\tau} \frac{1 + e^{-j2\pi f T_2} + e^{-j4\pi f T_2}}{1 + e^{-\frac{T_2}{\tau}} e^{-j2\pi f T_2}}.$$

18. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПЬЮ

Спектральная плотность мощности случайного сигнала в соответствии с (55) определяется как предел отношения квадрата модуля амплитудного спектра некоторой реализации случайного процесса к длительности этой реализации (при длительности, стремящейся к бесконечности). Учитывая (130), для спектральной плотности мощности выходного сигнала $y(t)$ получим

$$S_y(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|Y_T(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f) G(f)|^2}{T} = S_x(f) |G(f)|^2. \quad (151)$$

Таким образом, спектральная плотность мощности выходного сигнала линейной цепи равна произведению спектральной плотности мощности входного сиг-

нала и квадрата модуля частотной характеристики цепи.

Для того чтобы найти дисперсию случайного сигнала на выходе цепи (при нулевом среднем), нужно согласно (66) проинтегрировать спектральную плотность мощности по всему диапазону частот

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) |G(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} S_x(f) |G(f)|^2 df. \quad (152)$$

При использовании этого соотношения нужно иметь в виду следующее обстоятельство. Энергетический спектр случайного процесса S_x — это теоретический спектр, простирающийся по частоте от минус бесконечности до плюс бесконечности. Физический же спектр рассматривается в частотном диапазоне от 0 до ∞ . Поэтому, если $S_{x\Phi}$ — это физическая спектральная плотность мощности входного случайного процесса (именно она, как правило, приводится в справочных данных различных устройств), то тогда

$$D_y = \int_0^{\infty} S_{x\Phi}(f) |G(f)|^2 df. \quad (153)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об определении дисперсии случайного процесса на выходе инерционного звена первого порядка при воздействии на его вход белого шума. Пусть $S_{0\Phi}$ — это физическая спектральная плотность входного белого шума. Используя формулу частотной характеристики инерционной цепи (139), в соответствии со (153) получим

$$D_y = \int_0^{\infty} S_{0\Phi} \left| \frac{1}{j2\pi f\tau + 1} \right|^2 df = \frac{S_{0\Phi}}{4\tau}. \quad (154)$$

При определении детерминированного сигнала на выходе линейной цепи, как мы видели, возможно использовать свертку (137) входного сигнала и импульсной характеристики цепи. Подобным образом ковариационную функцию выходного случайного сигнала можно находить как свертку ковариационной функции входного сигнала и ковариационной функции импульсной характеристики цепи [6].

Важной характеристикой случайного процесса является распределение вероятностей. Вообще говоря,

распределение вероятностей случайного процесса преобразуется при прохождении его через линейную цепь сложным образом. Но при типичном в большинстве случаев нормальном распределении дело, к счастью, обстоит проще: линейные операции, совершаемые над таким процессом, не изменяют нормального распределения вероятностей [6].

19. НАЗНАЧЕНИЕ И ТИПЫ ФИЛЬТРОВ

[Фильтры, рассматриваемые в данной книге, — это устройства, целенаправленным образом изменяющие спектры сигналов. Необходимость предварительно познакомить читателя со спектрами различных сигналов и объясняется тот факт, что только здесь мы обращаемся к понятию фильтрации сигнала.

Фильтрация сигнала, т. е. изменение его спектра, обычно предпринимается с целью увеличить отношение полезного сигнала к шумам и помехам или подчеркнуть (усилить) какие-нибудь полезные качества сигнала. Например, при измерении сигналов, получаемых от термопар, чаще всего приходится применять фильтры, ослабляющие сетевые помехи. Выходной полезный сигнал термопар составляет, как правило, несколько милливольт, и помеха от силовой сети, имеющая частоту 50 Гц, может быть сравнимой с полезным сигналом или даже превосходить его. Другой пример — фильтрация сигнала, получаемого от датчика момента, развиваемого двигателем некоторого транспортного средства. Выделяя с помощью фильтра постоянную составляющую этого сигнала, мы получаем информацию о средней мощности двигателя. Если же выделить и проанализировать высокочастотные составляющие сигнала, то можно сделать вывод о качестве работы системы регулирования, о вибрации, обусловленной работающим двигателем, и т. п.

[Классификация фильтров может быть проведена по различным признакам. Мы будем использовать при разделении фильтров по группам четыре различных признака, указанные ниже.

Первый признак — вид входного и выходного сигнала фильтра. Если эти сигналы аналоговые, то

фильтр называется аналоговым, если же сигналы представлены цифровым кодом, то фильтр называется цифровым. Возможны и промежуточные варианты: аналого-цифровой фильтр (вход аналоговый, выход цифровой) и цифроаналоговый (вход цифровой, выход аналоговый).

Второй признак — вид частотной характеристики. По этому признаку фильтры делятся на следующие

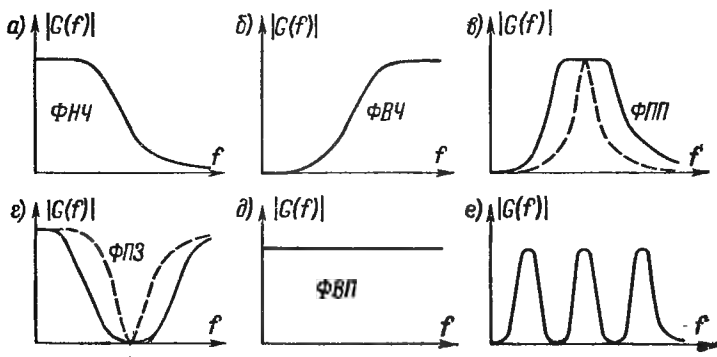


Рис. 24. Амплитудно-частотные характеристики различных фильтров

группы: фильтры нижних частот (ФНЧ) пропускают низкочастотные составляющие спектра и задерживают высокочастотные; фильтры верхних частот (ФВЧ) пропускают только высокочастотные составляющие; фильтры полосно пропускающие (ФПП) пропускают составляющие сигнала только в определенной полосе частот; фильтры полосно-заграждающие (ФПЗ) пропускают все составляющие сигнала, за исключением тех, частоты которых входят в определенную полосу; фильтры всепропускающие (ФВП) пропускают все без исключения составляющие сигнала, но изменяют фазовые соотношения между ними. Графики АЧХ упомянутых видов фильтров показаны на рис. 24, а, б, в, г, д. Кроме перечисленных, основных по этому признаку, групп, есть и другие разновидности. Например, резонансный фильтр представляет собой частный случай полосно-пропускающего фильтра, но с очень узкой полосой пропускания (штриховая АЧХ на рис. 24, в). Фильтр-пробка на определенную частоту — это ФПЗ с узкой полосой заграждения

(штриховая АЧХ на рис. 24, *г*). Гребенчатый фильтр — это такой фильтр, который имеет несколько полос пропускания (рис. 24, *е*). В название фильтра входит обычно та частотная полоса, которую фильтр пропускает. Так, фильтр нижних частот — это фильтр, пропускающий нижние частоты сигнала. Поэтому не совсем корректны встречающиеся иногда словосочетания типа «фильтрация помех». Фильтруется, т. е. проходит через фильтр, полезный сигнал, а помеха задерживается, не пропускается.

Отметим, что в качестве базового при анализе и синтезе фильтров обычно принимается фильтр нижних частот. Именно ФНЧ, как правило, рассматривается в различных публикациях, для него разрабатываются методики синтеза. Остальные же виды

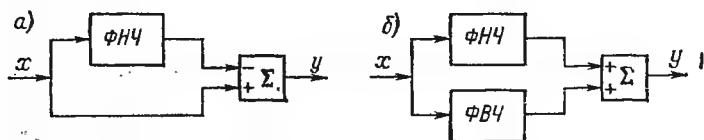


Рис. 25. Возможные структуры фильтра верхних частот (а) и полосно-заграждающего фильтра (б)

фильтров могут быть построены на основе ФНЧ. Так, если из полного сигнала вычесть выходной сигнал ФНЧ, то в итоге мы получим ФВЧ (рис. 25, *а*). ФПЗ можно построить, если включить параллельно ФНЧ и ФВЧ с разными частотами среза (рис. 25, *б*). Для построения ФПП достаточно соединить последовательно соответствующим образом рассчитанные ФНЧ и ФВЧ.

Третий признак, по которому различают разные типы фильтров, — это вид их импульсных характеристик. Непрерывный фильтр — это фильтр с непрерывной ИХ, дискретный фильтр — это фильтр, ИХ которого представлена набором δ -импульсов. Наконец, импульсный фильтр имеет ИХ, состоящую из последовательности одинаковых по форме импульсов конечной длительности разной амплитуды. В принципе возможны фильтры, при классификации которых по данному признаку возникают некоторые затруднения, но такие фильтры на практике встречаются редко.

Последний, четвертый, признак, по которому мы будем классифицировать фильтры, — это протяженность импульсной характеристики. Если ИХ финитна, т. е. ограничена во времени, то такие фильтры называют фильтрами с конечной импульсной характеристикой или коротко КИХ-фильтрами. Если ИХ, хотя и затухает со временем, но имеет теоретически неограниченную во времени протяженность, то соответствующий фильтр называют БИХ-фильтром, т. е.

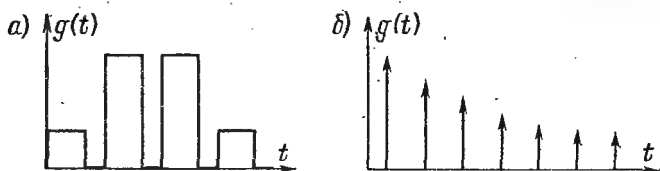


Рис. 26. Примеры импульсных характеристик импульсного (а) и дискретного (б) фильтров

фильтром с бесконечной импульсной характеристикой.

На рис. 26 в качестве примера показаны ИХ двух видов фильтров: импульсного КИХ-фильтра (рис. 26, а) и дискретного БИХ-фильтра (рис. 26, б).

Теория фильтрации сигналов и методы построения фильтров в настоящее время весьма развиты. Существует очень большое число различных видов фильтров. В настоящей книге рассматриваются далеко не все виды, а только наиболее типичные. В частности, мы не будем рассматривать нелинейные фильтры, т. е. фильтры, для которых не выполняется принцип суперпозиции. Не будут также рассмотрены нестационарные фильтры, особенностью которых является то, что их импульсная характеристика представляет собой функцию двух аргументов: реакция фильтра на входной δ -импульс зависит не только от времени, прошедшего с момента приложения этого δ -импульса, но также и от момента прихода этого импульса, определяемого относительно некоторого начала отсчета. В ряде простых случаев нестационарные фильтры могут быть сведены к стационарным. Например, усредняющий фильтр, производящий однократное интегрирование сигнала за некоторый ограниченный промежуток времени, может рассматриваться как вариант фильтра со скользящим усреднением.

АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

20. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРОВ

Активные фильтры состоят из активных элементов — операционных усилителей и пассивных элементов — резисторов и конденсаторов. Катушки индуктивности вследствие их нетехнологичности и больших потерь в таких фильтрах обычно не применяют. В соответствии с приведенной в § 19 классификацией активные фильтры — это аналоговые непрерывные БИХ-фильтры.

Как уже указывалось, в качестве базового фильтра при анализе обычно используют фильтр нижних частот. Идеальный фильтр нижних частот имеет постоянный конечный коэффициент передачи в полосе частот от нуля до частоты среза f_c и равный нулю коэффициент передачи при частотах, лежащих выше частоты среза. Однако идеальный фильтр физически нереализуем: его импульсная характеристика простирается во времени от $t = -\infty$ до $t = +\infty$ (подобная кривая показана на рис. 2, в).

Передаточные функции активных фильтров представляют собой в общем случае отношение двух операторных полиномов. Аппроксимация характеристик активных фильтров сводится к выбору таких коэффициентов этих полиномов, которые обеспечивают наилучшее в том или ином смысле приближение к желаемой амплитудно-частотной (АЧХ) или фазо-частотной (ФЧХ) характеристике фильтра.

Наиболее широко применяются следующие типы активных фильтров, отличие которых друг от друга обусловлено различным подходом к нахождению наилучшей аппроксимации: фильтры Баттерворта, Чебышева, инверсный Чебышева, Кауэра (эллиптический), Бесселя [14, 20].

Фильтр Баттерворта имеет АЧХ, квадрат которой определяется простым соотношением

$$|G(\bar{f})|^2 = \frac{1}{\bar{f}^{2n} + 1}, \quad (155)$$

где $\bar{f} = f/f_c$ — относительная частота; f_c — частота среза; n — порядок фильтра.

Все производные функции (155) по частоте $\bar{f}$ от первой до $(2n-1)$ -й включительно в точке $\bar{f}=0$ равны нулю. Поэтому фильтр Баттерворта называют фильтром с максимально плоской (или максимально гладкой) АЧХ.

Фильтр Чебышева имеет АЧХ, которая в полосе пропускания характеризуется пульсациями одинаковой амплитуды, поэтому его часто называют фильтром равноволновых пульсаций. За пределами полосы пропускания АЧХ этого фильтра монотонно уменьшается, причем крутизна спада АЧХ в этой области у фильтра Чебышева больше, чем у фильтра Баттерворта такого же порядка.

Квадрат АЧХ фильтра Чебышева определяется соотношением

$$|G(\bar{f})|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\bar{f})}, \quad (156)$$

где $T_n(\bar{f})$ — полином Чебышева первого рода n -го порядка, ϵ — некоторый постоянный коэффициент, задающий амплитуду пульсаций АЧХ.

Полином Чебышева n -го порядка может быть найден на основе рекуррентного соотношения

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad (157)$$

причем

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (158)$$

В промежутке $-1 < x < 1$ значения полинома Чебышева волнообразно изменяются между уровнями -1 и $+1$. При этом число полуволи на графике полинома на единицу меньше порядка полинома. При $|x| = 1$ всегда имеем $|T_n(x)| = 1$. При $|x| > 1$ модуль полинома Чебышева монотонно и неограниченно возрастает.

Инверсный фильтр Чебышева имеет АЧХ, которая монотонно изменяется в пределах полосы пропускания и пульсирует в полосе заграждения. Эта АЧХ описывается соотношением

$$|G(\bar{f})|^2 = \frac{\epsilon^2 T_n^2(1/\bar{f})}{1 + \epsilon^2 T_n^2(1/\bar{f})}. \quad (159)$$

Фильтр Кауэра (эллиптический фильтр) имеет амплитудно-частотную характери-

стику, пульсирующую как в полосе пропускания, так и в полосе заграждения. Квадрат АЧХ этого фильтра имеет вид [20]

$$|G(\bar{f})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\bar{f})}, \quad (160)$$

где $R_n(\bar{f})$ — рациональная функция, определяемая при четных n соотношением

$$R_n(x) = \frac{(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_k^2)}{(x^2 x_1^2 - 1)(x^2 x_2^2 - 1) \dots (x^2 x_k^2 - 1)}, \quad (161)$$

где $k = n/2$. При нечетных n в числитель правой части (161) добавляется множитель x , а k принимается равным $(n-1)/2$. Функция $R_n(x)$ обладает следующим свойством:

$$R_n(1/x) = 1/R_n(x).$$

Параметры $x_1, x_2, \dots, x_k$ имеют значения больше нуля и меньше единицы и выбираются таким образом, что в промежутке $0 \leq x \leq x_c$ (где $x_c < 1$) обеспечиваются равноволновые пульсации функции $R_n(x)$ между нулем и некоторым значением Δ . При этом в полосе пропускания квадрат АЧХ эллиптического фильтра (160) пульсирует между значениями 1 и $1/(1 + \varepsilon^2 \Delta^2)$, а в полосе заграждения — между значениями 0 и $1/(1 + \varepsilon^2/\Delta^2)$.

Эллиптический фильтр в сравнении со всеми другими типами фильтров имеет наиболее крутой спад АЧХ при переходе от полосы пропускания к полосе заграждения.

Фильтр Бесселя отличается от других описанных выше фильтров тем, что имеет хорошую фазочастотную характеристику. Проходящий через фильтр сигнал не изменит своей формы, если все гармоники сигнала будут задерживаться в фильтре на одно и то же время. Поскольку фазовый сдвиг измеряется в долях периода рассматриваемой гармоники, то постоянство времени задержки равносильно линейной частотной зависимости фазового сдвига сигнала в фильтре.

Фильтр Бесселя обеспечивает наилучшее приближение реальной ФЧХ к идеальной линейной зависимости. Зависимость времени запаздывания от частоты для фильтра Бесселя имеет такой же характер, как АЧХ для фильтра Баттерворта.

Передаточная функция фильтра Бесселя определяется формулой

$$G(p) = \frac{B_n(0)}{B_n(p)}, \quad (162)$$

где $B_n(p)$ — полином Бесселя, который может быть найден на основе равенств

$$\begin{aligned} B_n(x) &= (2n-1)B_{n-1}(x) + x^2 B_{n-2}(x); \\ B_1(x) &= x+1; \quad B_2(x) = x^2 + 3x + 3. \end{aligned} \quad (163)$$

Соотношение между АЧХ различных типов фильтров можно наблюдать на примере АЧХ фильтров

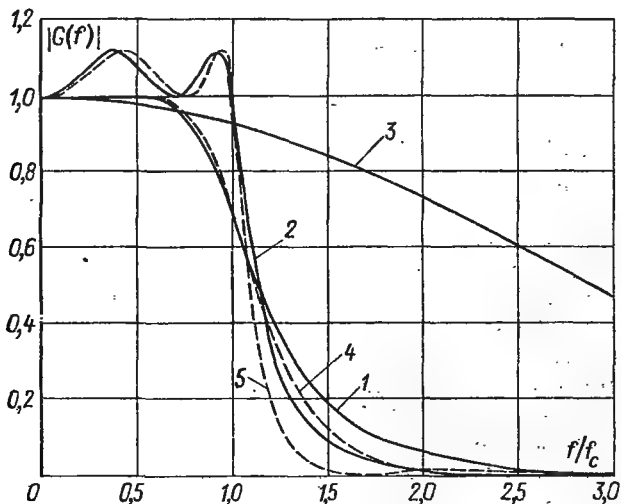


Рис. 27. Амплитудно-частотные характеристики фильтров нижних частот 4-го порядка (1 — Баттерворта; 2 — Чебышева; 3 — Бесселя; 4 — инверсный Чебышева; 5 — Кауэра)

4-го порядка, приведенных на рис. 27. Для фильтров Чебышева, инверсного Чебышева и Кауэра АЧХ зависит не только от порядка фильтра, но и от принятых параметров, определяющих пульсации АЧХ. В данном случае (рис. 27) фильтры Чебышева и Кауэра имеют пульсации в полосе пропускания, равные 1 дБ, а в полосе заграждения инверсный фильтр Чебышева и фильтр Кауэра характеризуются колебаниями АЧХ в диапазоне от $-\infty$ до -40 дБ.

Сравнивая между собой различные типы фильтров, следует иметь в виду, что фильтры, характеризую-

щиеся более крутым спадом АЧХ в переходной полосе, имеют обычно большее время установления выходного сигнала при скачкообразном изменении входного.

21. СХЕМЫ АКТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Результатом аппроксимации характеристики проектируемого фильтра является его передаточная функция (в случае фильтра Бесселя) или его АЧХ (в случае фильтров других типов). Существует методика, в соответствии с которой по АЧХ линейного звена можно найти его передаточную функцию [20].

Очевидно, что следующим этапом в проектировании активных фильтров должен быть выбор электронных цепей, которые бы имели требуемые передаточные функции. При этом обычно передаточные функции фильтров представляют в виде произведения дробно-рациональных сомножителей, содержащих в числителе и знаменателе полиномы не выше 2-го порядка. Соответственно этому для реализации фильтров необходимы типовые звенья первого и второго порядка. Звено первого порядка — это простая пассивная RC -цепь. Схема звена второго порядка зависит от вида дробно-рациональной передаточной функции.

Для фильтров Баттерворта, Чебышева и Бесселя, называемых также полиномиальными фильтрами, звено второго порядка должно воспроизводить передаточную функцию вида

$$G(p) = \frac{c \cdot 4\pi^2 f_c^2}{p^2 + 2\pi p b f_c + c \cdot 4\pi^2 f_c^2}. \quad (164)$$

Для неполиномиальных фильтров, к которым относятся инверсный фильтр Чебышева и эллиптический фильтр, требуется звено, воспроизводящее функцию вида

$$G(p) = \frac{(p^2 + a \cdot 4\pi^2 f_c^2) c/a}{p^2 + 2\pi p b f_c + c \cdot 4\pi^2 f_c^2}. \quad (165)$$

Форма АЧХ и ФЧХ фильтров определяется соотношением безразмерных параметров a , b , c , входящих в (164) и (165), а частота f_c , присутствующая в этих

формулах, задает масштаб этих характеристик по частотной оси.

В настоящее время издано достаточно много справочников, в которых приводятся коэффициенты передаточных функций фильтров различных типов. В табл. 3 эти коэффициенты приведены для некоторых фильтров 2-го, 4-го и 6-го порядка, для построения которых требуется соответственно 1, 2 и 3 звена

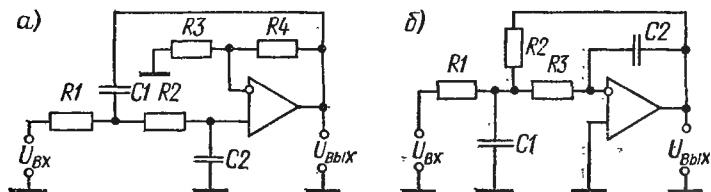


Рис. 28. Активные звенья полиномиальных активных фильтров

второго порядка. Эти данные заимствованы из справочника [14], где они приведены с большей точностью для существенно большего числа разновидностей фильтров.

В табл. 3 приняты следующие обозначения: q_1 — уровень минимумов пульсаций АЧХ в полосе пропускания (уровень максимумов принят за 0 дБ); q_2 — уровень максимумов пульсаций в полосе заграждения (между этими максимумами АЧХ спадает до нуля, т. е. в децибелах до $-\infty$). Значениям $-0,1$; $-0,5$; -1 дБ соответствуют отклонения от 100 %, примерно равные $-1,1$; $-5,6$; $-10,9$ %. Уровню -40 дБ соответствует 1 %. Коэффициенты, приведенные в табл. 3, рассчитаны так, что на частоте f_c АЧХ фильтров Баттерворта и инверсного фильтра Чебышева имеют спад -3 дБ, а АЧХ фильтров Чебышева и эллиптического на этой частоте уменьшаются до уровня q_1 . Для фильтра Бесселя на низких частотах $f \ll f_c$ задержка сигнала равна примерно $1/(2\pi f_c)$.

Для реализации полиномиальных фильтров чаще других используют звенья, схемы которых показаны на рис. 28. Для звена на основе неинвертирующего усилителя по схеме рис. 28, а (звено Саллен — Ки) передаточная функция имеет вид

$$G(p) = \frac{1 + R_4/R_3}{p^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + p C_2 (R_1 + R_2) + 1} \quad (166)$$

Таблица 3. Данные к расчету активных фильтров

Порядок фильтра		2	4		6		
Номер звена в фильтре		1	1	2	1	2	3
Фильтр Баттерворта	<i>b</i>	1,4142	0,7654	1,8478	0,5176	1,4142	1,9319
	<i>c</i>	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Фильтр Бесселя	<i>b</i>	3,0000	5,7924	4,2076	5,0319	8,4967	7,4714
	<i>c</i>	3,0000	9,1401	11,488	26,514	18,801	20,853
Фильтр Чебышева, $q_1 = -0,1$ дБ	<i>b</i>	2,3724	0,5283	1,2755	0,2294	0,6267	0,8561
	<i>c</i>	3,3140	1,3300	0,6229	1,1294	0,6964	0,2634
Фильтр Чебышева, $q_1 = -0,5$ дБ	<i>b</i>	1,4256	0,3507	0,8467	0,1553	0,4243	0,5796
	<i>c</i>	1,5162	1,0635	0,3564	1,0230	0,5900	0,1570
Фильтр Чебышева, $q_1 = -1$ дБ	<i>b</i>	1,0977	0,2791	0,6737	0,1244	0,3398	0,4641
	<i>c</i>	1,1025	0,9865	0,2794	0,9907	0,5577	0,1247
Инверсный фильтр Чебышева, $q_2 = -40$ дБ	<i>a</i>	101,00	4,7485	27,676	2,1487	4,0094	29,927
	<i>b</i>	1,4141	0,6892	2,0315	0,3791	1,3339	2,5582
	<i>c</i>	1,0100	1,0375	1,2667	1,0346	1,3323	1,8705
Инверсный фильтр Чебышева, $q_2 = -60$ дБ	<i>a</i>	1001,0	13,691	79,796	3,9331	0,4497	1,0186
	<i>b</i>	1,4142	0,7412	1,9062	7,3393	1,3965	7,3393
	<i>c</i>	1,0010	1,0127	1,0788	54,781	2,2095	1,3409
Фильтр Кауэра: $q_1 = -0,1$ дБ; $q_2 = -40$ дБ	<i>a</i>		4,2692	22,327	1,5069	2,2598	13,137
	<i>b</i>		1,3461	0,4248	1,0920	0,4733	0,1104
	<i>c</i>		0,7469	1,2910	0,4806	0,8772	1,0734
Фильтр Кауэра: $q_1 = -0,5$ дБ; $q_2 = -40$ дБ	<i>a</i>	143,63	3,0091	14,910	1,3095	9,9655	1,8557
	<i>b</i>	1,4180	0,9071	0,2719	0,7701	0,3058	0,0650
	<i>c</i>	1,5214	0,4478	1,0614	0,3176	0,7965	1,0142
Фильтр Кауэра: $q_1 = -1$ дБ; $q_2 = -40$ дБ	<i>a</i>	98,756	2,5907	12,428	1,2406	8,7778	1,7081
	<i>b</i>	1,0915	0,7286	0,2106	0,6310	0,2368	0,0476
	<i>c</i>	1,1081	0,3618	0,9985	0,2678	0,7799	0,9994
Фильтр Кауэра: $q_1 = -0,1$ дБ; $q_2 = -60$ дБ	<i>a</i>		12,361	69,585	2,5289	4,2298	28,108
	<i>b</i>		1,2989	0,4938	0,9658	0,5612	0,1657
	<i>c</i>		0,6604	1,3176	0,3514	0,7864	1,1006
Фильтр Кауэра: $q_1 = -0,5$ дБ; $q_2 = -60$ дБ	<i>a</i>		8,3455	46,159	2,0613	3,3397	21,390
	<i>b</i>		0,8668	0,3243	0,6690	0,3740	0,1061
	<i>c</i>		0,3838	1,0632	0,2213	0,6918	1,0189
Фильтр Кауэра: $q_1 = -1$ дБ; $q_2 = -60$ дБ	<i>a</i>		7,0041	38,327	1,8901	18,893	3,0106
	<i>b</i>		0,6921	0,2560	0,5429	0,2962	0,0820
	<i>c</i>		0,3040	0,9909	0,1815	0,6672	0,9961

Для звена с многопетлевой обратной связью по схеме рис. 28, б (звено Рауха) можно получить

$$G(p) = \frac{-R_2/R_1}{p^2 C_1 C_2 R_2 R_3 + p C_2 (R_2 + R_3 + R_2 R_3 / R_1) + 1}. \quad (167)$$

Более универсальным, хотя и более сложным является биквадратное звено (рис. 29). Это звено мо-

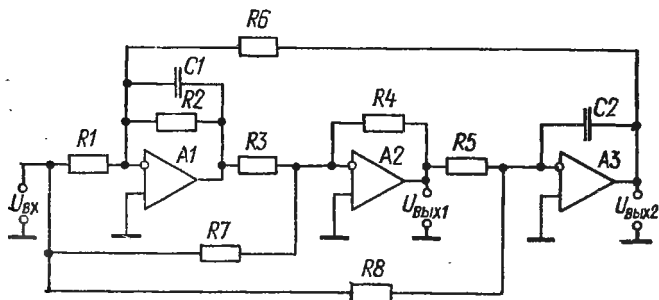


Рис. 29. Биквадратное звено активного фильтра

жет использоваться как в полиномиальных, так и в неполиномиальных фильтрах. Для выходных напряжений $U_{\text{ВЫХ1}}$ и $U_{\text{ВЫХ2}}$ передаточные функции $G_1(p)$ и $G_2(p)$ имеют вид

$$G_1(p) = \frac{-p^2 C_1 C_2 \frac{R_3 R_5 R_6}{R_7} + p C_2 \frac{R_5 R_6}{R_2} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_3}{R_7} \right) - \frac{R_5}{R_8}}{p^2 C_1 C_2 R_3 R_5 R_6 / R_4 + p C_2 R_3 R_5 R_6 / (R_2 R_4) + 1}; \quad (168)$$

$$G_2(p) = \frac{(p C_1 R_2 + 1) \frac{R_3 R_6}{R_2 R_8} \left(\frac{R_8}{R_7} - \frac{R_5}{R_4} \right) - \frac{R_6}{R_1}}{p^2 C_1 C_2 R_3 R_5 R_6 / R_4 + p C_2 R_3 R_5 R_6 / (R_2 R_4) + 1}. \quad (169)$$

Если принять $R_1 R_3 = R_2 R_7$, то $U_{\text{ВЫХ1}}$ можно использовать как выходное напряжение звена неполиномиального фильтра. Если же $R_7 = \infty$ и $R_8 = \infty$, то напряжение $U_{\text{ВЫХ2}}$ соответствует звену полиномиальных фильтров.

Передаточные функции звеньев фильтров верхних частот можно получить, если в (164) и (165) вместо p подставить f_c^2/p . При этом для неполиномиальных фильтров характер передаточной функции сохраняется, изменяются только ее коэффициенты. Это значит, что неполиномиальные фильтры верхних частот реализуются с помощью точно таких же схем, что и

фильтры нижних частот, но при других сопротивлениях и емкостях. Для полиномиальных же фильтров передаточные функции ФНЧ и ФВЧ различаются по своему виду. Звенья второго порядка, пригодные для реализации полиномиальных ФВЧ, легко получить исходя из соответствующих звеньев ФНЧ. Для этого в схеме рис. 28, а резисторы R_1 , R_2 заменяются на конденсаторы, а конденсаторы C_1 , C_2 — на резисторы. Подобным образом в схеме рис. 28, б резисторы R_1 , R_2 , R_3 заменяются конденсаторами, а конденсаторы C_1 , C_2 — резисторами. В схеме рис. 29 в качестве выходного напряжения полиномиального ФВЧ следует использовать $U_{\text{вых 1}}$ и принять $R_8 = \infty$; $R_1 R_3 = R_2 R_7$.

Для получения передаточной функции полосно-пропускающего или полосно-заграждающего фильтра нужно подставить в (164) и (165) вместо p соответственно выражения $f_c(p^2 + f_1 f_2) / [p(f_2 - f_1)]$ и $f_c p(f_2 - f_1) / (p^2 + f_1 f_2)$, где f_1 и f_2 — нижняя и верхняя граничные частоты.

22. РАСЧЕТ АКТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Сопоставляя соотношения (164) и (165) с соотношениями (166) — (169), нетрудно вывести формулы для расчета сопротивлений и емкостей выбранных звеньев второго порядка.

Вместе с тем можно воспользоваться и одним из справочных пособий, где эти формулы уже выведены и на их основе разработаны простые методики расчета фильтров.

Исходными данными для расчета являются частота среза f_c , коэффициент усиления A , порядок и тип фильтра.

При выборе порядка фильтра следует учитывать то обстоятельство, что чем выше порядок, тем больше фильтр по своим свойствам приближается к идеальному. Но увеличение порядка, с другой стороны, приводит к усложнению схемы фильтра и ужесточению требований к точности его элементов. В связи с этим на практике редко используют фильтры, порядок которых превышает 6—8.

В [14] рекомендуется следующий порядок расчета ФНЧ. Независимо от того, какое из звеньев второго порядка предполагается в фильтре (рис. 28, 29), рас-

чет начинают с выбора емкости конденсатора C_1 . Для того чтобы сопротивления резисторов лежали в диапазоне единиц, десятков или сотен килоом, рекомендуется емкость C_1 выбирать примерно равной $10/f_c$, где f_c подставляем в килогерцах, а C_1 получаем в нанофарадах.

При использовании схемы рис. 28, а вначале определяют C_2 , R_1 и R_2 (значения b , c берут из табл. 3):

$$C_2 \leq [A - 1 + b^2/(4c)] C_1;$$

$$R_1 = \frac{1/(\pi f_c C_1)}{b + \sqrt{b^2 + 4c(A - 1) - 4cC_2/C_1}};$$

$$R_2 = \frac{1}{cC_1C_2R_1(2\pi f_c)^2}.$$

Наконец, исходя из заданного коэффициента усиления A находят сопротивления R_3 и R_4 . Если $A = 1$, то $R_3 = \infty$, $R_4 = 0$. Если $A > 1$, то $R_4/R_3 = A - 1$. При выборе сопротивлений R_3 и R_4 (при заданном их отношении) можно, например, выполнить условие равенства сопротивлений для входных токов двух входов операционного усилителя. Тогда $R_3 = A(R_1 + R_2)/(A - 1)$; $R_4 = A(R_1 + R_2)$.

Расчет схемы рис. 28, б ведут по формулам

$$C_2 \leq b^2 C_1 / [4c(|A| + 1)];$$

$$R_2 = \frac{(|A| + 1)/(\pi f_c C_1)}{b + \sqrt{b^2 - 4c(|A| + 1)C_2/C_1}};$$

$$R_1 = R_2/|A|; \quad R_3 = 1/[cC_1C_2(2\pi f_c)^2 R_2].$$

Для биквадратного звена (рис. 29) в случае полиномиального фильтра, как уже упоминалось, принимают $R_7 = \infty$, $R_8 = \infty$. Далее используют следующие формулы:

$$C_2 = C_1; \quad R_4 = 1/(2\pi f_c C_1); \quad R_3 = R_5 = R_4;$$

$$R_1 = R_4/(cA); \quad R_2 = R_4/b; \quad R_6 = R_4/c.$$

Биквадратное звено неполиномиального фильтра рассчитывают по формулам

$$R_1 = \frac{a}{Abc2\pi f_c C_1}; \quad R_2 = \frac{cA}{a} R_1; \quad R_4 = R_3;$$

$$R_5 = R_6 \frac{C_1}{C_2}; \quad R_6 = \frac{b}{\sqrt{c}} R_2; \quad R_7 = \frac{cA}{a} R_3; \quad R_8 = R_6 \frac{C_1}{AC_2}.$$

Значения C_2 и R_3 могут здесь выбираться произвольно, например так, чтобы уменьшить разброс сопротивлений входящих в фильтр резисторов. Для большинства случаев можно принять $C_2 = C_1$ и $R_3 \approx \approx 1/(2\pi f_c C_1)$.

Формулы для расчета фильтров верхних частот и других типов фильтров мы здесь не приводим. Их можно найти в одном из справочников, например в [14].

При реализации активных фильтров следует иметь в виду, что к точности их элементов предъявляются довольно высокие требования. Если реальные параметры элементов отличаются от расчетных, то тогда частотная характеристика фильтра не будет совпадать с желаемой. Обоснованные допуски на емкости и сопротивления активных фильтров можно назначить на основе анализа, выполняемого с помощью теории чувствительности [4]. Ориентировочно можно принять, что для фильтров 4—6-го порядков необходимы резисторы и конденсаторы с наибольшими допустимыми погрешностями 1 %—0,5 %.

Если исходить из условия, что точность частоты среза фильтра менее важна, чем точность формы частотной характеристики, то тогда следует предъявлять более высокие требования к точности отношений сопротивлений и отношений емкостей и менее высокие — к точности самих сопротивлений и емкостей. С этой точки зрения удобно использовать фильтры с одинаковыми емкостями.

Для фильтра по схеме рис. 28, а одинаковые емкости возможны, например, при коэффициенте усиления фильтра A , равном двум. При этом формулы для расчета фильтра упрощаются:

$$R_1 = \frac{1}{b \cdot 2\pi f_c C_1}; \quad R_2 = \frac{b^2}{c} R_1. \quad (170)$$

Емкости конденсаторов $C_1 = C_2$ при этом можно выбрать произвольно, но для того чтобы получать удобные сопротивления резисторов, рекомендуется, как и раньше, принимать $C_1 \approx 10/f_c$, где C_1 — в нанофарадах, а f_c — в килогерцах. Сопротивления резисторов R_3 и R_4 , задающих коэффициент усиления, устанавливаются одинаковыми ($R_3 = R_4$), что создает предпосылки для получения высокой точности этого

коэффициента (используются два одинаковых резистора с равными температурными коэффициентами). Напоминаем, что значение $R_3 = R_4$ можно устанавливать в известных пределах произвольно. Это дает возможность использовать имеющиеся в данный момент в распоряжении проектировщика точные резисторы.

В некоторых случаях желательно иметь фильтр с коэффициентом усиления полезного сигнала A , равным единице. Фильтр с одинаковыми емкостями и с единичным коэффициентом усиления $A = 1$ можно построить по схеме рис. 30. Для расчета этого

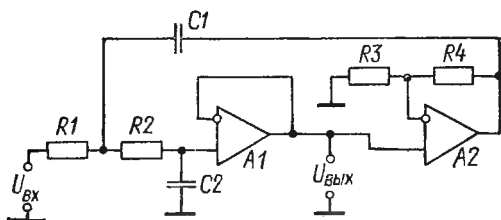


Рис. 30. Звено активного фильтра с единичным коэффициентом передачи для полезного сигнала и с возможностью применения равных емкостей

фильтра при $R_3 = R_4$ пригодны формулы (170). Достоинством фильтра является то, что точность сопротивлений не влияет на коэффициент передачи постоянной составляющей входного сигнала.

В качестве примера рассчитаем фильтр Чебышева 4-го порядка с пульсациями АЧХ в полосе пропускания, равными 1 дБ.

Пусть требуемая частота среза равна 300 Гц. Тогда $C_1 = C_2 \approx 10/0,3$ нФ. Выбираем для обоих звеньев фильтра $C_1 = C_2 = 33$ нФ. Из табл. 3 для двух звеньев фильтра находим $b = 0,2791$; $c = 0,9865$ и $b = 0,6737$; $c = 0,2794$. Ориентируясь на схему звена второго порядка рис. 30, по формулам (170) находим для первого звена $R_1 = 57,6$ кОм; $R_2 = 4,55$ кОм и для второго звена $R_1 = 23,9$ кОм; $R_2 = 38,8$ кОм. Сопротивления $R_3 = R_4$ в обоих звеньях устанавливаем произвольно, например $R_3 = R_4 = 10$ кОм. АЧХ рассчитанного фильтра показана на рис. 27 (кривая 2).

КИХ-ФИЛЬТРЫ, ПОДАВЛЯЮЩИЕ ПОМЕХИ С ЛИНЕЙЧАТЫМ СПЕКТРОМ

23. ОБЩИЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ИМПУЛЬСНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ, ПОДАВЛЯЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ ПОМЕХУ

Типичной помехой, воздействующей на измерительные устройства, является периодическая помеха, вызываемая влиянием сетевого напряжения. Спектр такой помехи имеет линейчатый характер: мощность помехи сконцентрирована на основной частоте $f_{п1}$ (частоте питающей сети) и кратных ей частотах высших гармоник $f_{пk} = kf_{п1}$, где $k > 1$ — целое число. Для подавления такой помехи необходимо, чтобы АЧХ измерительного устройства имела значение, близкое к нулю, в узких частотных областях, располагающихся вблизи частот основной и высшей гармоник сетевого напряжения.

В диапазоне частот полезного сигнала АЧХ фильтра должна иметь постоянное, желательно большое значение, а ФЧХ фильтра в этом диапазоне должна по возможности иметь линейный характер. Для измерительной техники типичным является низкочастотный полезный сигнал. При условии, что частота f_m наивысшей значимой гармоники этого сигнала много меньше основной частоты помехи, приближенно можно принять $f_m \approx 0$. В этом случае для неискаженной передачи полезного сигнала требуется, чтобы фильтр имел плоский участок АЧХ и линейный характер ФЧХ в районе нулевой частоты.

Если к быстрдействию средства измерения предъявляются относительно высокие требования, то предпочтение отдают КИХ-фильтрам, так как БИХ-фильтры при скачке входного сигнала имеют теоретически бесконечное время установления выходного сигнала. Весовая функция КИХ-фильтра может быть непрерывной, импульсной или дискретной. Практическое применение в измерительной технике находят, как правило, только дискретные и ступенчатые (кусочно-

постоянные) весовые функции (ВФ). Это объясняется трудностью реализации ВФ других видов и отсутствием у них заметных преимуществ. Поэтому в данной главе будут рассмотрены именно ступенчатые и дискретные ВФ.

Ступенчатая функция времени, содержащая N ступеней длительностью T_2 , может рассматриваться, как уже указывалось (см. § 5, § 11), как свертка дискретной функции, содержащей N δ -импульсов, и одиночного прямоугольного импульса, имеющего единичную амплитуду и длительность T_2 . Соответственно этому частотная характеристика $G(f)$ фильтра, реализующего такую ВФ, может быть найдена как произведение спектров дискретной функции $G_d(f)$ и одиночного П-образного импульса $G_{\Pi}(f)$. Аналогично формуле (74) мы можем записать

$$G(f) = G_d(f) \cdot \frac{1}{T_2} G_{\Pi}(f). \quad (171)$$

Пусть амплитуды ступеней ступенчатой ВФ (весовые коэффициенты) равны $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$. Тогда площади δ -импульсов дискретной ВФ $G_d(f)$ будут равны $a_0 T_2, a_1 T_2, \dots, a_{N-1} T_2$. Будем считать, что начальному δ -импульсу соответствует момент времени $t=0$. Последующие импульсы действуют в моменты $T_2, 2T_2, \dots, (N-1)T_2$. Частотную характеристику фильтра, реализующего дискретную ВФ, найдем, используя формулу (33) и свойство линейности преобразования Фурье:

$$G_d(f) = T_2 [a_0 + a_1 e^{-j2\pi f T_2} + \dots + a_{N-1} e^{-j2\pi f (N-1) T_2}]. \quad (172)$$

ЧХ фильтра, ВФ которого имеет вид прямоугольного импульса шириной T_2 , найдем по формуле (26):

$$G_{\Pi}(f) = \frac{\sin(\pi f T_2)}{\pi f}. \quad (173)$$

Подставляя (172) и (173) в (171), определим

$$G(f) = \frac{\sin(\pi f T_2)}{\pi f} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j2\pi f n T_2}. \quad (174)$$

Получение нулей АЧХ (174) в районе основной и высших гармоник помехи возможно как за счет множителя $G_{\Pi}(f)$, так и за счет множителя $G_d(f)$ —

см. (171). Однако в первом случае есть только одна степень свободы (можно изменять $G_{\Pi}(f)$, изменяя T_2), а во втором случае мы имеем $N - 1$ степеней свободы — $N - 1$ отношений коэффициентов a_n .

П-образная ВФ — это ВФ измерительного устройства, интегрирующего входную измеряемую величину с постоянным весом в течение заданного времени (в нашем случае это время обозначено как T_2). Такую ВФ обычно имеют интегрирующие АЦП. АЧХ подобного интегрирующего АЦП показана на рис. 3, в. Нули ЧХ (173) располагаются в точках $f_r = r/T_2$, где $r = \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, для подавления периодической помехи следует устанавливать

$$T_2 = r/f_{\text{п1}}, \quad (175)$$

иначе говоря, время интегрирования АЦП должно быть равно или кратно периоду помехи. Переходя к приведенной ЧХ

$$\bar{G}(f) = G(f)/G(0), \quad (176)$$

на основании (173) и (175) запишем

$$\bar{G}_{\Pi}(f) = \frac{\sin(\pi \bar{f})}{\pi \bar{f}} = \frac{\sin(\pi r f/f_{\text{п1}})}{\pi r f/f_{\text{п1}}}, \quad (177)$$

где $\bar{f} = fT_2$.

В большинстве случаев длительность ВФ фиксирована. Частота же помехи может изменяться в некоторых пределах. Предположим, что действительная частота помехи равна

$$f_{\text{п}} = f_{\text{п1}}(1 + \varepsilon),$$

где $|\varepsilon| \ll 1$. Тогда АЧХ измерительного устройства для основной и любой k -й гармоники помехи при условии $r k \varepsilon \ll 1$ может быть найдена исходя из (177) в виде

$$|G(kf_{\text{п}})| \approx \frac{|\sin[\pi f_{\text{п1}}(1 + \varepsilon)]|}{\pi f_{\text{п1}}} \approx |\varepsilon|. \quad (178)$$

Следовательно, при выполнении условия (175) и при отклонении частоты помехи от расчетной приведенная АЧХ измерительного устройства будет равна модулю относительного отклонения частоты. Иными словами, при нестабильности частоты сети $\pm 1\%$ подавление сетевой помехи в интегрирующем АЦП с кратным номинальному периоду помехи временем интегрирования будет равно 40 дБ.

Для анализа свойств дискретной ВФ воспользуемся Z -преобразованием, что позволит нам получить более компактные выражения.

В соответствии с соотношением (120) Z -преобразование функции (172) будет иметь вид

$$G(z) = G_d(z)/T_2 = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} = z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{N-1-n}. \quad (179)$$

Поскольку в данном случае нас интересует лишь АЧХ средства измерения, то мы можем ограничиться рассмотрением в (179) характеристического полинома (ХП)

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{N-1-n}. \quad (180)$$

Приведенная АЧХ измерительного прибора, реализующего дискретную ВФ, может быть найдена на основе (180) подстановкой в ХП $z = e^{j2\pi f T_2}$:

$$|\bar{G}_d(f)| = \left| \frac{P(z)}{P(0)} \right|_{z=e^{j2\pi f T_2}}. \quad (181)$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты ХП — это весовые коэффициенты, которые нужно использовать для получения взвешенной суммы отсчетов входного сигнала.

Нулю АЧХ $|\bar{G}_d(f)|$ на некоторой частоте $f_{\text{п1}}$ очевидно соответствует корень характеристического полинома

$$z = e^{j2\pi f_{\text{п1}} T_2}. \quad (182)$$

Из (182) следует, что интересующие нас корни ХП в общем случае комплексные и находятся в комплексной плоскости на окружности единичного радиуса.

Так как коэффициенты a_n — действительные числа, то комплексные корни ХП должны существовать в виде комплексно-сопряженных пар $e^{j\varphi}$ и $e^{-j\varphi}$. Непарными могут быть только вещественные корни $e^{j0} = 1$ и $e^{j\pi} = -1$. Первый из этих корней нас не интересует, так как он соответствует нулю АЧХ на частоте полезного сигнала. Второй корень будет обсужден в дальнейшем.

Пусть ХП имеет только пару комплексно-сопряженных корней $z_1 = e^{j\varphi}$ и $z_2 = e^{-j\varphi}$:

$$P(z) = (z - e^{j\varphi})(z - e^{-j\varphi}) = z^2 - 2z \cos \varphi + 1. \quad (183)$$

Для подавления основной гармоник помехи нужно, чтобы угол φ был равен аргументу комплексной функции (182), т. е.

$$\varphi = 2\pi f_{\text{п}} T_2. \quad (184)$$

Исходя из (184) можно, задавшись углом φ , найти длительность ступени T_2 или, задавшись T_2 , найти φ

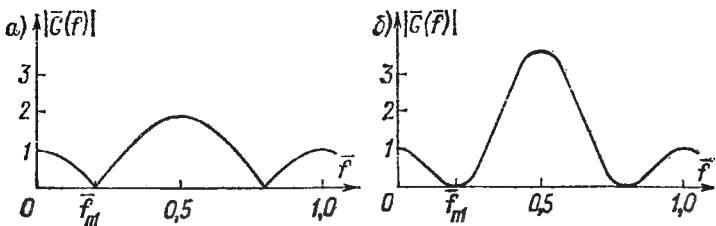


Рис. 31. Амплитудно-частотная характеристика дискретной весовой функции с однократным (а) и двухкратным (б) нулем на частоте помехи

и далее весовой коэффициент $-2 \cos \varphi$, обеспечивающие нужный нам корень ХП.

АЧХ, соответствующую ХП (183), можно найти по формуле (181). При этом удобно использовать соотношение

$$|z - e^{i\varphi}|_{z=e^{j2\pi f T_2}} = 2 |\sin(\pi f T_2 - \varphi/2)|. \quad (185)$$

Учитывая (184) и вводя для краткости нормированную частоту $\bar{f} = f T_2$, в данном случае получим

$$|\bar{G}_d(\bar{f})| = \frac{|\sin(\pi \bar{f} - \pi \bar{f}_{\text{п}}) \sin(\pi \bar{f} + \pi \bar{f}_{\text{п}})|}{\sin^2(\pi \bar{f}_{\text{п}})}. \quad (186)$$

График этой АЧХ показан на рис. 31, а.

Если $f_{\text{п}} = f_{\text{п}}(1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon \ll 1$, то тогда (186) преобразуется к виду

$$|\bar{G}_d(f_{\text{п}})| \approx \frac{2\pi \varepsilon \bar{f}_{\text{п}}}{|\operatorname{tg} \pi \bar{f}_{\text{п}}|}. \quad (187)$$

В частности, при $\bar{f}_{\text{п}} \ll 1$

$$|\bar{G}_d(f_{\text{п}})| \approx 2\varepsilon. \quad (188)$$

Итак, если ориентироваться на формулы (183) и (184), то измерительное устройство должно с интервалом T_2 производить три измерения мгновенных значений входного сигнала и затем их суммировать с весами 1; $-2\cos(2\pi f_{\text{п}} T_2)$; 1. Полученный таким обра-

зом результат не будет зависеть от гармонической помехи, имеющей частоту $f_{п1}$ вне зависимости от фазы этой помехи.

Сравнивая П-образную и рассматриваемую дискретную ВФ, можно видеть, что П-образная ВФ при правильном выборе ее длительности обеспечивает подавление основной и всех высших гармоник помехи. Дискретная ВФ, состоящая из трех δ -импульсов, дает возможность подавить только одну гармонику помехи, но длительность этой ВФ теоретически может быть сколь угодно мала. Если же реализуется ступенчатая ВФ, то тогда АЧХ средства измерения будет включать в себя нули, обусловленные как П-образной, так и дискретной ВФ.

Рассмотрим вопрос о целесообразной длительности дискретной ВФ. Если использовать очень короткую ВФ (т. е. малый аргумент φ и согласно равенству (184) малый интервал дискретизации T_2), то измерительное устройство будет иметь высокое быстродействие, но вместе с тем оно будет чувствительным к погрешности задания весовых коэффициентов и к шумам в определенном диапазоне частот. Выберем, например, $\varphi = 0,02\pi$. Тогда получим $T_2 = 0,01/f_{п1}$, и весовые коэффициенты будут равны 1; $-1,996$; 1. Для полезного входного сигнала, имеющего нулевую частоту, коэффициент передачи будет равен $1 - 1,996 + 1 = 0,004$. В то же время для шумов, имеющих частоту $\bar{f} \approx 0,5$, мы получаем всплеск АЧХ (рис. 31, а). Исходя из формулы (186), найдем

$$|\bar{G}_d(0,5)| = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\varphi/2)}. \quad (189)$$

Для рассматриваемого примера получим $|\bar{G}_d(0,5)| \approx \approx 10^3$, что означает, что на частоте $\bar{f} = 0,5$ чувствительность средства измерения будет в 1000 раз больше, чем чувствительность на частоте полезного сигнала $\bar{f} = 0$.

Ограничим $|\bar{G}_d(0,5)|$, например, значением 10; тогда получим $\varphi \geq 0,2\pi$ и $T_2 \geq 0,1T_{п1}$, где $T_{п1} = 1/f_{п1}$ — период помехи. Таким образом, при принятии такого ограничения длительность интервала дискретизации целесообразно устанавливать не менее одной десятой периода подавляемой помехи.

Используя парные корни вида $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$, можно синтезировать ВФ, обеспечивающую АЧХ с нулем

второй или более высокой кратности на частоте помехи. Действительно, если возвести в квадрат ХП (183), получим новый характеристический полином вида

$$P(z) = z^4 - 4z^3 \cos \varphi + 2z^2(1 + 2 \cos^2 \varphi) - 4z \cos \varphi + 1. \quad (190)$$

Соответственно этому возведется в квадрат и выражение АЧХ (186). Время, необходимое для реализации ВФ, при этом, естественно, увеличится: теперь уже нужно находить взвешенную сумму пяти отсчетов входного сигнала. Однако при малых отклонениях частоты помехи от расчетной подавление помехи теперь будет более сильным, чем раньше. Действительно, при нуле второй кратности не только сама АЧХ будет равна нулю в точке $f = f_{п1}$, но и производная от АЧХ в этой точке также будет равна нулю (рис. 31, б). АЧХ фильтра в окрестностях частоты $f_{п1}$ можно найти, возводя в квадрат правую часть равенства (187):

$$|\bar{G}_d(\bar{f}_{п})| \approx \frac{4\pi^2 \varepsilon^2 \bar{f}_{п1}^2}{1g^2(\pi \bar{f}_{п1})}. \quad (191)$$

Не составляет труда синтезировать таким путем ВФ, подавляющую наряду с основной также и определенные высшие гармоники помехи. Нужно только составить характеристический полином в виде произведения трехчленов:

$$P(z) = \prod_k (z^2 - 2z \cos \varphi_k + 1)^{q_k}, \quad (192)$$

где

$$\varphi_k = 2\pi k \bar{f}_{п1} = 2\pi k f_{п1} T_2; \quad (193)$$

k — номер гармоники периодической помехи, подлежащей подавлению; q_k — желаемая кратность нуля АЧХ для рассматриваемой гармоники помехи.

Таким образом, используя описанную методику, можно синтезировать ВФ, подавляющие помеху с линейчатым спектром. Кратность нуля АЧХ на частоте определенной гармоники помехи нужно выбирать тем выше, чем больше мощность этой гармоники в составе помехи. Кроме того, при выборе кратности нулей нужно принимать во внимание возможные отклонения частоты помехи относительно номинального значения: чем выше допустимые отклонения частоты,

тем при заданном коэффициенте помехоподавления должен быть выше порядок нулей АЧХ.

Переходя от дискретной к ступенчатой ВФ, следует находить АЧХ фильтра, пользуясь соотношением (171). Однако при этом нужно иметь в виду, что длительность импульсов ступенчатой ВФ не обязательно должна быть равна интервалу дискретизации T_2 дискретной ВФ. Эта длительность может быть также меньше или больше интервала T_2 . В последнем случае прямоугольные импульсы частично накладываются друг на друга, что вызывает суммирование их на участках наложения.

24. СИНТЕЗ ПОМЕХОПОДАВЛЯЮЩИХ ВФ ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ ЦИКЛОТОМИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Обозначим буквой m отношение номинального периода помехи к длительности одной ступени ВФ:

$$m = \frac{T_{\text{п1}}}{T_2} = \frac{f_2}{f_{\text{п1}}}. \quad (194)$$

Это отношение, как уже указывалось, не должно быть слишком большим, поскольку иначе, как это следует из (189), шумы и помехи в определенной полосе частот будут проходить на выход со значительно большим, чем полезный сигнал, весом. С другой стороны, чем больше m , тем меньше будет общая длительность весовой функции и тем выше будет быстродействие измерительного устройства. При прочих равных условиях целесообразно выбирать m равным целому числу. Дело в том, что нули АЧХ в случае дискретной ВФ повторяются с периодом $f_2 = 1/T_2$. Поэтому, если АЧХ имеет нуль на основной частоте помехи $f_{\text{п1}}$, то одновременно будут существовать нули на частотах

$$f_k = f_{\text{п1}} + kf_2 = f_{\text{п1}} + kmf_{\text{п1}}, \quad (195)$$

где k — целое число. Если m — также целое число, то тогда нули на частотах f_k будут обеспечивать подавление высших гармоник помехи с номерами $1 + km$.

Будем выбирать m равным целому числу, лежащему в диапазоне от 2 до 12. В этом случае оказывается возможным синтезировать удобные для

практического применения весовые функции, основываясь на циклотомических полиномах [12].

Циклотомические полиномы, иначе называемые полиномами деления круга, определяются формулой

$$\Phi_n(z) = \prod_k (z - e^{j\varphi_k}), \quad (196)$$

где аргументы корней $\varphi_k = 2\pi k/n$, а k принимает все значения $k = 1, 2, \dots, n-1$, за исключением тех, которые имеют общие целые множители с числом n [2]. Различные циклотомические полиномы не содержат совпадающих корней. Расположение корней

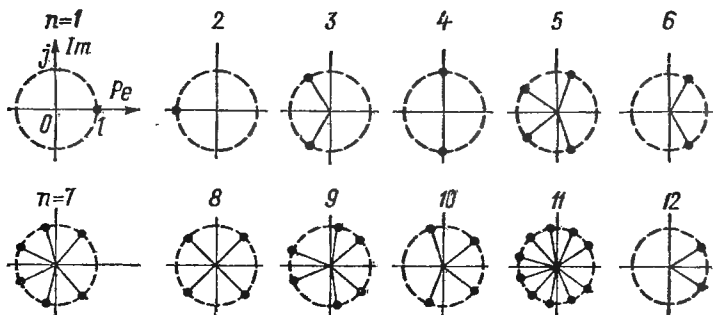


Рис. 32. Расположение корней циклотомических полиномов $\Phi_n(z)$ для $n = 1 \div 12$

этих полиномов на комплексной плоскости на окружности единичного радиуса показано на рис. 32.

В табл. 4 приведены циклотомические полиномы $\Phi_n(z)$ для $n = 1 \div 12$, аргументы φ_i корней этих полиномов и амплитудно-частотные характеристики дискретных весовых функций, соответствующих этим полиномам.

Рассмотрим порядок нахождения характеристического полинома весовой функции с использованием циклотомических полиномов. При выбранной длительности ступени ступенчатой ВФ (или интервале дискретизации дискретной ВФ) $T_2 = T_{\text{пл}}/m$ в соответствии со (184) для подавления основной гармоники помехи требуется обеспечить корень ХП $z = e^{j\varphi}$, где $\varphi = 2\pi/m$. Такой корень имеет циклотомический полином $\Phi_m(z)$. Таким образом, в состав ХП должен войти в качестве множителя полином $\Phi_m(z)$, причем он должен быть в степени, равной желаемой кратности нуля АЧХ на основной гармонике помехи.

Таблица 4. Циклотомические полиномы

n	$\Phi_n(z)$	$\Phi_i/(2\pi/n)$	$ \overline{G}(\bar{f}) , \bar{f}=fT_2$
1	$z - 1$	1	$ \sin(\pi \bar{f}) $
2	$z + 1$	1	$ \cos(\pi \bar{f}) $
3	$z^2 + z + 1$	± 1	$\frac{1}{3} \sin(3\pi \bar{f})/\sin(\pi \bar{f}) $
4	$z^2 + 1$	± 1	$ \cos(2\pi \bar{f}) $
5	$\sum_{i=0}^4 z^{4-i}$	$\pm 1; \pm 2$	$\frac{1}{5} \sin(5\pi \bar{f})/\sin(\pi \bar{f}) $
6	$z^2 - z + 1$	± 1	$ \cos(3\pi \bar{f})/\cos(\pi \bar{f}) $
7	$\sum_{i=0}^6 z^{6-i}$	$\pm 1; \pm 2; \pm 3$	$\frac{1}{7} \sin(7\pi \bar{f})/\sin(\pi \bar{f}) $
8	$z^4 + 1$	$\pm 1; \pm 3$	$ \cos(4\pi \bar{f}) $
9	$z^6 + z^3 + 1$	$\pm 1; \pm 2; \pm 4$	$\frac{1}{3} \sin(9\pi \bar{f})/\sin(3\pi \bar{f}) $
10	$\sum_{i=0}^4 (-z)^{4-i}$	$\pm 1; \pm 3$	$\cos(5\pi \bar{f})/\cos(\pi \bar{f}) $
11	$\sum_{i=0}^{10} z^{10-i}$	$\pm(1 \div 5)$	$\frac{1}{11} \sin(11\pi \bar{f})/\sin(\pi \bar{f}) $
12	$z^4 - z^2 + 1$	$\pm 1; \pm 5$	$ \cos(6\pi \bar{f})/\cos(\pi \bar{f}) $

Полином $\Phi_m(z)$ имеет в общем случае больше чем один корень. Поэтому одновременно с нулем на основной гармонике помехи полином $\Phi_m(z)$ обеспечит нули на частотах тех высших гармоник помехи, номера которых не имеют общих целых множителей с числом m . Например, при $m=6$ включение $\Phi_6(z)$ в состав ХП обеспечит подавление наряду с 1-й также и 5-й гармоники помехи.

Определим теперь, каким путем можно обеспечить подавление высшей гармоники помехи, номер k которой имеет общий целый множитель r с выбранным числом m . Пусть $k=ra$ и $m=rb$, где a и b — целые числа, отличные от единицы, не имеющие общих множителей. Для подавления k -й гармоники нужно, чтобы ХП имел корень $e^{j\varphi_k}$, где $\varphi_k = 2\pi k/m = 2\pi a/b$. Такой корень имеется у полинома $\Phi_b(z)$. Так что для подавления k -й гармоники нужно включить в ХП множитель $\Phi_b(z)$. В частности, если $m=6$, то тогда 2-й и 4-й гармоникам соответствуют углы $2\pi \cdot 2/6 = 2\pi/3$ и $2\pi \cdot 4/6 = 4\pi/3$. Так что для подавления этих гармоник в состав ХП нужно включить $\Phi_3(z)$. Рассуждая таким же образом, приходим к выводу, что для подавления 3-й гармоники нужно включить в состав ХП полином $\Phi_2(z)$.

Если принять $m=2$, то тогда минимальной по длительности ВФ будет соответствовать ХП $P(z) = \Phi_2(z) = z + 1$. Подобная ВФ обеспечивает нули на частотах основной и всех нечетных высших гармоник помехи. Если требуется увеличить коэффициент помехоподавления при малых отклонениях частоты помехи относительно номинального значения, то можно реализовать ВФ, для которой характеристический полином имеет вид $P(z) = \Phi_2^2(z) = (z + 1)^2$ или $P(z) = \Phi_2^3(z) = (z + 1)^3$. Таким путем мы получаем известные ВФ с биномиальными коэффициентами (биномиальные ВФ).

Биномиальные ВФ предполагают измерение через полупериод помехи: $T_2 = 1/(2f_{п1})$. Наиболее широко применяются биномиальные ВФ 1-го порядка (весовые коэффициенты 1, 1), 2-го порядка (1, 2, 1), 3-го порядка (1, 3, 3, 1).

АЧХ дискретной ВФ, синтезированной с применением циклотомических полиномов, можно найти, перемножая приведенные в табл. 4 АЧХ полиномов, во-

шедших в состав характеристического полинома данной весовой функции. В частности, при применении биномиальных ВФ ($T_2 = T_{\text{п1}}/2$) характеристическому полиному $P(z) = (z + 1)^q$ соответствует АЧХ

$$|\bar{G}_{\text{д. б}}(\bar{f})| = |\cos(\pi\bar{f})|^q = \left| \cos \frac{\pi f}{2f_{\text{п1}}} \right|^q. \quad (197)$$

Если действительная частота помехи немного отличается от номинальной: $f_{\text{п}} = f_{\text{п1}}(1 + \varepsilon)$, то тогда, исходя из (197), получим

$$|\bar{G}_{\text{д}}(f_{\text{п}})| \approx \left| \frac{\pi \varepsilon}{2} \right|^q. \quad (198)$$

Для ступенчатых биномиальных ВФ (длительность ступени равна $T_{\text{п1}}/2$) соответственно получим

$$|\bar{G}(f)| = \frac{2f_{\text{п1}}}{\pi f} \left| \sin \frac{\pi f}{2f_{\text{п1}}} \cos^q \frac{\pi f}{2f_{\text{п1}}} \right|, \quad (199)$$

и при $f_{\text{п}} = f_{\text{п1}}(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$,

$$|\bar{G}(f_{\text{п}})| \approx \frac{2}{\pi} \left| \frac{\pi \varepsilon}{2} \right|^q. \quad (200)$$

Рассмотрим пример синтеза ступенчатой ВФ с использованием циклотомических полиномов. Выберем $T_2 = T_{\text{п1}}/6$, т. е. $m = 6$. Пусть основная гармоника помехи подавляется нулем АЧХ второй кратности, а все высшие гармоники — нулями АЧХ не менее чем 1-й кратности. Тогда в соответствии с приведенными выше правилами в характеристический полином должны войти множители: $\Phi_6^2(z)$ (подавляет 1-ю и 5-ю гармоники помехи), $\Phi_3(z)$ (подавляет 2-ю и 4-ю гармоники помехи) и $\Phi_2(z)$ (подавляет 3-ю гармонику помехи). В итоге получим

$$P(z) = \Phi_6^2(z) \Phi_3(z) \Phi_2(z) = z^7 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + 1. \quad (201)$$

Перемножая АЧХ соответствующих полиномов, заимствованные из табл. 4, и АЧХ единичного прямоугольного импульса, получим после простых преобразований

$$|\bar{G}(\bar{f})| = \left| \frac{\sin(6\pi\bar{f}) \cos(3\pi\bar{f})}{6\pi\bar{f} \cos(\pi\bar{f})} \right| = \left| \frac{\sin(\pi f/f_{\text{п1}}) \cos[\pi f/(2f_{\text{п1}})]}{(\pi f/f_{\text{п1}}) \cos[\pi f/(6f_{\text{п1}})]} \right|. \quad (202)$$

Напоминаем, что $\bar{f} = fT_2$. В данном случае $\bar{f} = f/(6f_{п1})$.

График ступенчатой ВФ, соответствующей характеристическому полиному (201), и АЧХ устройства, ее реализующего, (202) показаны на рис. 33. Эта весовая функция (авторское свидетельство СССР

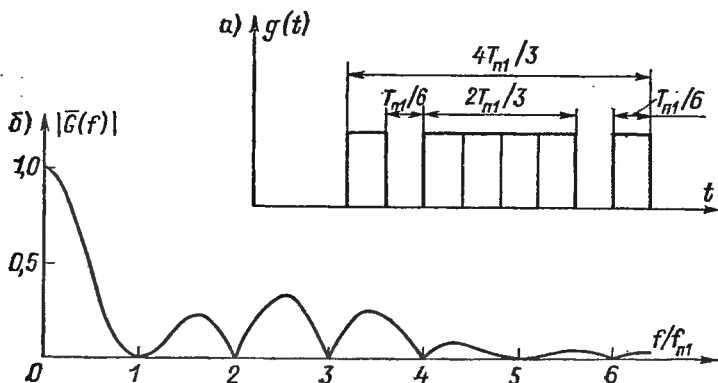


Рис. 33. Весовая функция (а) с длительностью ступени $T_2 = T_{п1}/6$ и ее АЧХ (б)

№ 813771) обладает тем полезным для практики свойством, что содержит только единичные и нулевые весовые коэффициенты; для ее реализации достаточно интегрировать сигнал с постоянным весом в течение трех временных промежутков длительностью $T_{п1}/6$, $4T_{п1}/6$, $T_{п1}/6$, разделенных паузами длительностью $T_{п1}/6$. При изменении частоты гармонической помехи на 1 % данная ВФ без подстройки длительности обеспечивает коэффициент помехоподавления более 70 дБ.

Циклотомические полиномы могут применяться и в тех случаях, когда необходимо синтезировать ВФ, подавляющую две или несколько различающихся по частоте помех. Пусть, например, требуется сконструировать ВФ, подавляющую сетевую помеху как при питании от сети с частотой $f_{п1} = 50$ Гц, так и при питании от сети с частотой $f_{п2} = 60$ Гц. Этим двум частотам будут соответствовать различные интервалы между импульсами дискретной ВФ (T_{21} и T_{22}). Введем индексы у переменной, являющейся аргументом характеристического полинома: пусть z_1 соответствует частоте помехи 50 Гц, а z_2 — частоте 60 Гц.

Предположим, для подавления обеих помех выбрана биномиальная ВФ второго порядка. Тогда ХП весовой функции может быть найден как произведение двух квадратичных биномов

$$P(z_1, z_2) = (z_1 + 1)^2 (z_2 + 1)^2 = z_1^2 z_2^2 + 2z_1^2 z_2 + 2z_1 z_2^2 + z_1^2 + z_2^2 + 4z_1 z_2 + 2z_1 + 2z_2 + 1.$$

Из полученного выражения следует, что данная весовая функция содержит 9 импульсов. Интервалы T_{21} и T_{22} должны быть равны полупериоду соответствующей помехи: $T_{21} = 1/(2f_{n1})$; $T_{22} = 1/(2f_{n2})$. Моменты времени, в которые должны появляться импульсы ВФ, легко могут быть найдены путем суммирования соответствующих временных промежутков: слагаемому характеристического полинома вида $z_1^{q_1} z_2^{q_2}$ соответствует момент времени $q_1 T_{21} + q_2 T_{22}$. Так, слагаемое $2z_1^2 z_2$ означает, что импульс двойной амплитуды должен появиться в момент времени, отстоящий от начала ВФ на время $2T_{21} + T_{22}$.

АЧХ дискретной ВФ в данном случае может быть найдена по формуле, подобной формуле (181):

$$|\bar{G}_d(f)| = \left| \frac{P(z_1, z_2)}{P(0, 0)} \right|_{z_1 = e^{j2\pi f T_{21}}, z_2 = e^{j2\pi f T_{22}}}$$

При переходе к ступенчатой ВФ, как и раньше, каждый импульс дискретной ВФ заменяется прямоугольным импульсом. Если ширина прямоугольного импульса больше наименьшего промежутка между импульсами, то возникнет наложение импульсов, которое нужно учесть суммированием импульсов на участках наложения.

25. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОМЕХОПОДАВЛЯЮЩИХ ВФ

Рассмотрим некоторые важные свойства ВФ, подавляющих помехи с линейчатым спектром.

Погрешности задания весовых коэффициентов приводят к уменьшению коэффициента ослабления периодической помехи. Рассмотрим влияние этих погрешностей на АЧХ фильтра.

Вначале проанализируем случай, когда только одна ступень a_n задана с погрешностью γ_n :

$$a_{nd} = a_n (1 + \gamma_n),$$

где a_{nd} — действительное значение коэффициента a_n .

Исходя из формулы (181) нетрудно установить, что на частоте f_{nl} , на которой при точных весовых коэффициентах имеется нуль АЧХ, в данном случае получим

$$|\bar{G}(f_{nl})| = \left| \gamma_n \frac{a_n}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i} \right|. \quad (203)$$

Если $\bar{a}$ — среднее значение весового коэффициента данной ВФ, то тогда

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i = N\bar{a}$$

и (203) преобразуется к виду

$$|\bar{G}(f_{nl})| = \left| \gamma_n \frac{a_n}{N\bar{a}} \right|. \quad (204)$$

На основании полученного соотношения можно сделать два вывода. Во-первых, чем больше весовой коэффициент, тем выше требования к его точности. Во-вторых, чем больше импульсов содержит ВФ, тем больше допустимая погрешность для одного весового коэффициента.

В общем случае все весовые коэффициенты реализуемой ВФ имеют некоторые погрешности. С учетом этого на частоте помехи f_{nl} мы получим АЧХ

$$|\bar{G}(f_{nl})| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n (1 + \gamma_n) e^{j2\pi \bar{f}_{nl}} \right| \frac{1}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \right|}.$$

Поскольку при отсутствии погрешностей коэффициентов $G(\bar{f}_{nl}) = 0$, то для среднеквадратического значения приведенной АЧХ найдем

$$\begin{aligned} \tilde{G}(f_{nl}) = & \\ = & \frac{\sqrt{M \left\{ \left[\sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n a_n \cos(2\pi \bar{f}_{nl}) \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n a_n \sin(2\pi \bar{f}_{nl}) \right]^2 \right\}}}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \right|}. \end{aligned}$$

где M — математическое ожидание. Если погрешности γ_n различных весовых коэффициентов не зависят друг от друга, т. е. $M[\gamma_n \gamma_m] = 0$, и имеют одинаковые дисперсии $\tilde{\gamma}_0^2 = \tilde{\gamma}_1^2 = \dots = \tilde{\gamma}^2$, то тогда последнее соотношение можно привести к виду

$$\tilde{G}(f_{\text{пл}}) = \tilde{\gamma} \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2} \frac{1}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \right|} = \tilde{\gamma} \frac{\tilde{a}}{\tilde{a} \sqrt{N}}, \quad (205)$$

где $\tilde{a}$ — среднеквадратическое значение весового коэффициента.

Формула (205) показывает, что с точки зрения влияния погрешности коэффициентов предпочтительны ВФ относительно более гладкие, без многочисленных резких изменений амплитуды при переходе от одной ступени к другой. Кроме того, как и в рассмотренном ранее случае, здесь также увеличение числа импульсов ВФ снижает требования к точности весовых коэффициентов.

Минимальная длительность ВФ, подавляющей все гармоники помехи. Пусть отношение $m = f_2/f_{\text{пл}}$ — целое число. В соответствии с формулой (195) номера подаваемых гармоник периодической помехи повторяются с периодом m . Таким образом, если подавить первые m гармоник, то будут подавлены и все остальные высшие гармоники помехи.

Дискретная ВФ, сформированная с помощью циклотомических полиномов, может подавить 1-ю, 2-ю, $(m-1)$ -ю гармоники помехи. Гармоника с номером m не может быть подавлена дискретной весовой функцией, так как периодическое повторение нулей АЧХ, в частности, означает, что если обеспечить нуль АЧХ на частоте $f = mf_{\text{пл}}$, то будет существовать нуль и на частоте $f = 0$. А это значит, что будет подавляться также и полезный сигнал, что, естественно, не входит в задачу фильтрации.

Гармоника с номером m будет подавляться, если использовать не дискретную, а ступенчатую весовую функцию с длительностью ступени, равной $T_2 = T_{\text{пл}}/m$. Действительно, ЧХ одиночного прямоугольного импульса такой длительности $(\sin \pi \bar{f})/(\pi \bar{f})$ имеет нуль на частоте $\bar{f} = 1$, т. е. на частоте $f = 1/T_2 = mf_{\text{пл}}$.

Итак, для подавления всех гармоник периодической помехи требуется ступенчатая ВФ, которая 1-ю, 2-ю, ..., $(m-1)$ -ю гармоники подавляет за счет нулей АЧХ дискретной ВФ $G_d(f)$, а m -ю гармонику — за счет нуля АЧХ одиночного прямоугольного импульса $G_{\Pi}(f)$. Напоминаем, что АЧХ, соответствующая ступенчатой ВФ, равна произведению $G_d(f) G_{\Pi}(f)$. Характеристический полином дискретной ВФ в данном случае должен иметь по меньшей мере $m-1$

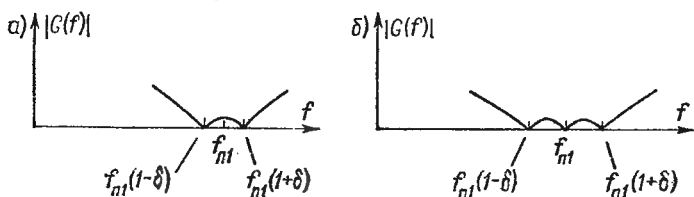


Рис. 34. АЧХ весовых функций с разнесенными нулями

корней, т. е. иметь $(m-1)$ -ю степень. Отсюда следует, что число членов этого полинома, а значит, и число ступеней ВФ минимально должно быть равно m . Соответственно этому длительность такой ВФ будет равна $mT_2 = T_{\Pi 1}$.

Таким образом, минимальная длительность ВФ, подавляющей все гармоники периодической помехи, равна периоду этой помехи.

Разнесение нулей АЧХ. Увеличение кратности нуля АЧХ на частоте помехи способствует повышению помехоподавления при нестабильности этой частоты. Однако при заданном минимальном допустимом коэффициенте ослабления помехи выгоднее не сосредоточивать нули АЧХ в одной точке, а несколько разносить их. Рассмотрим это положение на примере биномиальных ВФ.

Как уже указывалось, характеристический полином биномиальной ВФ имеет вид

$$P_{6q}(z) = (z + 1)^q, \quad (206)$$

где q — порядок ВФ. Если установить $T_2 = T_{\Pi 1}/2 = 1/(2f_{\Pi 1})$, то тогда спектры биномиальных функций второго и третьего порядка будут иметь в точке $f_{\Pi 1}$ нули соответственно второй и третьей кратности. Модифицируем теперь биномиальную ВФ путем разнесения этих нулей. Для ВФ второго порядка (рис. 34, а)

расположим нули АЧХ в точках $f = f_{п1}(1 \pm \delta)$, а для ВФ третьего порядка — в точках $f_{п1}$ и $f_{п1}(1 \pm \delta)$, где $\delta \ll 1$ (рис. 34, б). Соответственно этому характеристические полиномы этих ВФ приобретут вид

$$P_{62}(z) = z^2 + 2z \cos(\pi\delta) + 1; \quad (207)$$

$$P_{63}(z) = z^3 + [1 + 2 \cos(\pi\delta)](z^2 + z) + 1. \quad (208)$$

Из этих соотношений следует, что разнесение нулей АЧХ достигается за счет уменьшения амплитуды средних ступеней ВФ. Исходно для биномиальных ВФ эти амплитуды равны 1-2-1 и 1-3-3-1. Теперь же для модифицированных биномиальных ВФ амплитуда средней ступени ВФ второго порядка будет равна

$$a_1 = 2 \cos(\pi\delta) \approx 2(1 - \pi^2\delta^2/2), \quad (209)$$

а амплитуда двух соседних ступеней ВФ третьего порядка равна

$$a_1 = a_2 = 1 + 2 \cos(\pi\delta) \approx 3(1 - \pi^2\delta^2/3). \quad (210)$$

Амплитудно-частотные характеристики, соответствующие модифицированным дискретным биномиальным ВФ, могут быть найдены с помощью формулы (181) с учетом того, что для биномиальных ВФ $\bar{f}_{п1} = f_{п1}T_2 = 0,5$. В результате получим

$$|\bar{G}_{д. 62}(\bar{f})| = |\cos(\pi\bar{f} - \pi\delta/2) \cos(\pi\bar{f} + \pi\delta/2)|; \quad (211)$$

$$|\bar{G}_{д. 63}(\bar{f})| = |\cos(\pi\bar{f}) \cos(\pi\bar{f} - \pi\delta/2) \cos(\pi\bar{f} + \pi\delta/2)|. \quad (212)$$

В окрестности первой (основной) гармоники помехи, т. е. когда $\bar{f}_{п} = 0,5(1 + \epsilon)$, эти АЧХ примут вид

$$|\bar{G}_{д. 62}(f_{п})| \approx \frac{\pi^2}{4} |\epsilon^2 - \delta^2|; \quad (213)$$

$$|\bar{G}_{д. 63}(f_{п})| \approx \frac{\pi^3}{8} |\epsilon(\epsilon^2 - \delta^2)|. \quad (214)$$

Найдем оптимальное значение δ для ВФ второго порядка при заданной максимальной нестабильности частоты помехи ϵ_M . Приравнивая значения $|\bar{G}_{д. 62}(f)|$ на краях и середине диапазона частоты помехи, т. е. при $f = f_{п1}$ и $f = f_{п1}(1 \pm \epsilon_M)$, получим

$$\delta_2 = \epsilon_M / \sqrt{2}. \quad (215)$$

Подобным же образом для ВФ третьего порядка определим

$$\delta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_M. \quad (216)$$

При таких δ_2 и δ_3 максимальные значения АЧХ в полосе частот $f_{\text{п}}(1 \pm \varepsilon_M)$ составят соответственно $\pi^2 \varepsilon_M^2 / 8$ и $\pi^3 \varepsilon_M^3 / 32$.

Подставляя (215), (216) в (209), (210), найдем окончательные соотношения соответственно для биномиальных ВФ второго и третьего порядков:

$$a_1 \approx 2 \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \varepsilon_M^2 \right); \quad (217)$$

$$a_1 = a_2 \approx 3 \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \varepsilon_M^2 \right). \quad (218)$$

Если амплитуды средних ступеней модифицированных биномиальных ВФ устанавливать согласно этим соотношениям, то, как показывают несложные расчеты, минимальный коэффициент ослабления помехи в диапазоне $f_{\text{п}}(1 \pm \varepsilon_M)$ для ВФ второго порядка возрастает в 2 раза, а для ВФ третьего порядка — в 4 раза. При заданном же минимальном коэффициенте ослабления помехи переход от биномиальных ВФ к модифицированным биномиальным ВФ приводит к расширению полосы частот подавляемых помех для ВФ второго порядка в $\sqrt{2} \approx 1,4$ раза, а для ВФ третьего порядка — в $\sqrt[3]{4} \approx 1,6$ раза.

26. РАВНОАМПЛИТУДНЫЕ ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ

Реализация ступенчатых весовых функций предполагает переключение масштаба, с которым производится интегрирование входного сигнала. Исключения составляют ВФ, у которых отличные от нуля ступени имеют одинаковую амплитуду. Воспроизведение таких ВФ существенно упрощается и сводится к подаче сигнала на вход интегратора в определенные, зависящие от вида весовой функции промежутки времени. Подобные ВФ называют равноамплитудными, или одноуровневыми, или ВФ с единичными коэффициентами.

Наряду со ступенчатыми равноамплитудными ВФ могут применяться и дискретные равноамплитудные

ВФ. Реализация таких ВФ предполагает суммирование с одинаковыми весами мгновенных значений сигнала, взятых в определенные моменты времени.

Простейшие равноамплитудные ВФ — это П-образная и гребенчатая весовые функции. Свойства П-образной ВФ мы кратко рассмотрели в § 23. Там

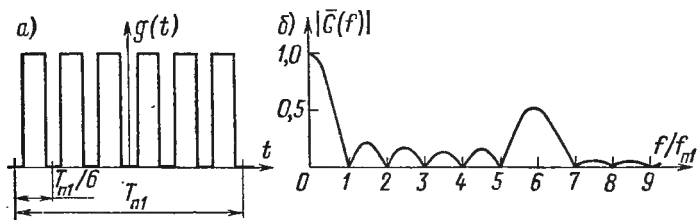


Рис. 35. Гребенчатая ВФ (а) и ее АЧХ (б)

было указано, что если выбрать длительность П-образной ВФ равной или кратной периоду помехи, то тогда на основной и всех высших гармониках помехи будут наблюдаться однократные нули АЧХ.

Гребенчатая ВФ — это ВФ, состоящая из N одинаковых по длительности и амплитуде прямоугольных импульсов, следующих друг за другом с интервалом $T_{п1}/N$ [9]. Пусть длительность этих импульсов равна $\mu T_{п1}/N$, где $\mu \leq 1$. Тогда в соответствии с формулами (39) и (40) для гребенчатой ВФ можем записать следующее соотношение для приведенной АЧХ:

$$|\bar{G}(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f / f_{п1})}{\mu \pi f / f_{п1}} \frac{\sin[\mu \pi f / (N f_{п1})]}{\sin[\pi f / (N f_{п1})]} \right|. \quad (219)$$

Из полученного соотношения следует, что гребенчатая ВФ обеспечивает подавление как основной, так и высших гармоник периодической помехи, за исключением гармоник, номера которых кратны N . Необходимо поэтому выбирать N так, чтобы влияние N -й, $2N$ -й и прочих, кратных N гармоник помехи не ухудшало работу прибора. Учитывая, что в помехе, вызванной сетевым напряжением, процент четных гармоник с высокими номерами относительно мал, имеет смысл выбирать N из ряда 6; 8; 10 и т. п.

На рис. 35 показана гребенчатая ВФ с $N = 6$ и соответствующая ей АЧХ. При малом отклонении частоты помехи от номинальной для основной гармоники помехи и высших гармоник, не кратных N ,

значение АЧХ точно так же, как и для П-образной ВФ, будет определяться формулой (178).

Высокий коэффициент ослабления помехи при нестабильности частоты помехи может быть достигнут путем подстройки гребенчатой ВФ под частоту помехи. Если в случае П-образной ВФ подстраивают длительность ВФ, то в случае гребенчатой ВФ длительность импульсов ВФ остается постоянной, а подстраивают интервалы между передними фронтами импульсов. Цепь подстройки поддерживает эти интервалы равными $T_{п1}/N$.

ВФ с импульсами, равными по длительности периоду помехи. П-образной и гребенчатой ВФ соответствуют АЧХ, имеющие нули первого порядка на частоте помехи. Можно повышать кратность нулей АЧХ, если использовать ступенчатую АЧХ, являющуюся сверткой П-образной и дискретной ВФ. Но для того чтобы ступенчатая ВФ оставалась равноамплитудной, нужно, чтобы при выполнении свертки П-образные ВФ не накладывались друг на друга, иначе говоря, чтобы временной интервал между импульсами дискретной ВФ превышал длительность П-образной ВФ.

Для синтеза ступенчатых равноамплитудных ВФ можно воспользоваться циклотомическими полиномами. Ранее мы применяли эти полиномы для конструирования ВФ, длительность ступеней которых была меньше периода помехи (мы обозначали символом m отношение $T_{п1}/T_2$ и это отношение выбирали в диапазоне 2—12). При этом первый, самый низкочастотный нуль АЧХ совпадал с основной гармоникой помехи. Но можно синтезировать ВФ так, чтобы с основной гармоникой помехи совпадал не первый, а один из последующих нулей АЧХ. Тогда один или несколько нулей АЧХ не будут совпадать по частоте с гармониками помехи, но зато ВФ может быть равноамплитудной.

Рассмотрим, например, циклотомический полином $\Phi_2(z) = z + 1$. Этот полином обеспечивает нули АЧХ на частотах $1/(2T_2)$, $3/(2T_2)$, $5/(2T_2)$, ... Биномиальные ВФ используют первый нуль АЧХ для подавления основной гармоники помехи, и поэтому интервал между импульсами T_2 выбирается равным полупериоду помехи $T_2 = 0,5/f_{п1}$. Но можно совместить с частотой основной гармоники помехи второй нуль

АЧХ — при частоте $3/(2T_2)$. В этом случае выполняется равенство $f_{\text{п}} = 1,5/T_2$ и интервал T_2 должен быть равен $1,5/f_{\text{п}}$, т. е. трем полупериодам помехи. Рассуждая таким же образом далее, приходим к выводу, что можно устанавливать T_2 равным любому нечетному числу полупериодов помехи.

Для полинома $\Phi_3(z) = z^2 + z + 1$ нули АЧХ располагаются на частотах $1/(3T_2)$, $2/(3T_2)$, $4/(3T_2)$, $5/(3T_2)$, ... Соответственно этому первая гармоника помехи будет подавлена, если установить T_2 равным $1/(3f_{\text{п}})$, $2/(3f_{\text{п}})$, $4/(3f_{\text{п}})$, $5/(3f_{\text{п}})$, ... Ранее мы использовали только первое значение из этого ряда. Теперь же мы видим, что могут быть использованы и другие значения.

Свертка импульса любой формы с дискретной ВФ, имеющей характеристический полином $\Phi_2(z) = z + 1$, означает переход к ВФ, состоящей из двух таких же импульсов, удаленных друг от друга на время T_2 . Аналогично свертка импульса с дискретной ВФ, характеризующейся полиномом $\Phi_3(z) = z^2 + z + 1$, приводит к ВФ, состоящей из трех исходных импульсов, разнесенных друг от друга на время T_2 .

Исходя из приведенных здесь положений, нетрудно сконструировать равноамплитудные весовые функции, обеспечивающие нужную кратность нуля АЧХ на частоте помехи.

Рассмотрим вначале пример использования полинома $\Phi_2(z)$ для синтеза равноамплитудной ВФ, подавляющей помеху сетевого напряжения 50 Гц. Равноамплитудная ВФ с нулем второй кратности на частоте 50 Гц может быть образована путем повторения П-образной ВФ длительностью 20 мс со сдвигом в 3 полупериода помехи, т. е. 30 мс. Можно далее получить нуль третьего порядка на частоте помехи, если образовать ВФ путем повторения ВФ второго порядка со сдвигом в 5 полупериодов помехи. Графики сконструированных таким образом ВФ и их амплитудно-частотные характеристики показаны на рис. 36. Формулы, описывающие эти АЧХ, для ВФ второго и третьего порядков имеют соответственно вид

$$|\bar{G}_2(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f/f_{\text{п}})}{\pi f/f_{\text{п}}} \cos \frac{1,5\pi f}{f_{\text{п}}} \right|; \quad (220)$$

$$|\bar{G}_3(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f/f_{\text{п}})}{\pi f/f_{\text{п}}} \cos \frac{1,5\pi f}{f_{\text{п}}} \cos \frac{2,5\pi f}{f_{\text{п}}} \right|. \quad (221)$$

Сконструируем теперь равноамплитудную ВФ с использованием полинома $\Phi_3(z)$. ВФ второго порядка, очевидно, будет состоять из трех импульсов длительностью $1/f_{\text{пн}}$, удаленных друг от друга на время $T_2 = 4/(3f_{\text{пн}})$ — рис. 37, а. Если еще раз повторить

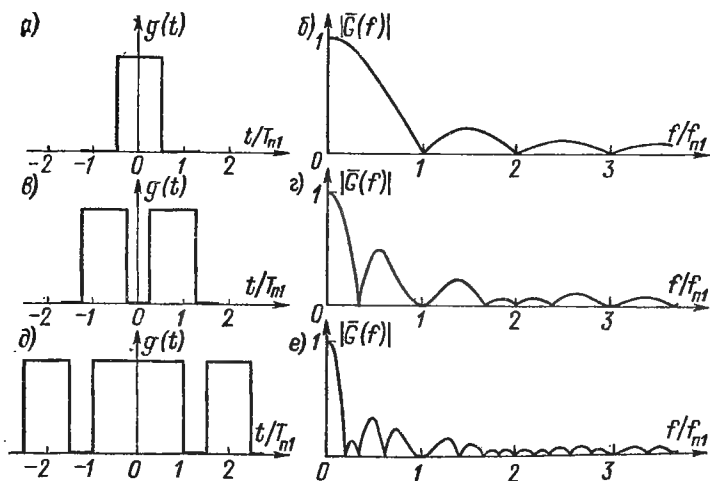


Рис. 36. Весовые функции с импульсами, равными по длительности периоду помехи (а, в, д), и их АЧХ (б, з, е)

трижды ВФ второго порядка со сдвигом $T_2 = 11/(3f_{\text{пн}})$, то мы получим ВФ третьего порядка (рис. 37, в). АЧХ для этих двух ВФ описываются формулами

$$|\bar{G}_2(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f/f_{\text{пн}})}{\pi f/f_{\text{пн}}} \frac{\sin(4\pi f/f_{\text{пн}})}{3 \sin[4\pi f/(3f_{\text{пн}})]} \right|; \quad (222)$$

$$|\bar{G}_3(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f/f_{\text{пн}})}{\pi f/f_{\text{пн}}} \frac{\sin(4\pi f/f_{\text{пн}})}{3 \sin[4\pi f/(3f_{\text{пн}})]} \frac{\sin(11\pi f/f_{\text{пн}})}{3 \sin[11\pi f/(3f_{\text{пн}})]} \right|. \quad (223)$$

ВФ с разнесенными нулями. Если использовать в ВФ короткие импульсы длительностью, существенно меньшей периода помехи, то можно конструировать равноамплитудные ВФ с разнесенными нулями АЧХ. Выше уже говорилось, что вместо увеличения кратности нуля АЧХ на частоте помехи целесообразно несколько разносить эти нули по частоте с тем, чтобы увеличить минимальный коэффициент ослабления помехи при заданной нестабильности частоты помехи.

С помощью циклотомических полиномов нетрудно найти дискретную равноамплитудную ВФ, обеспечивающую однократные нули АЧХ на заданных частотах. Если далее каждый δ -импульс дискретной ВФ заменить на прямоугольный импульс, причем длительность последнего установить меньшей минимального временного интервала между импульсами дискретной

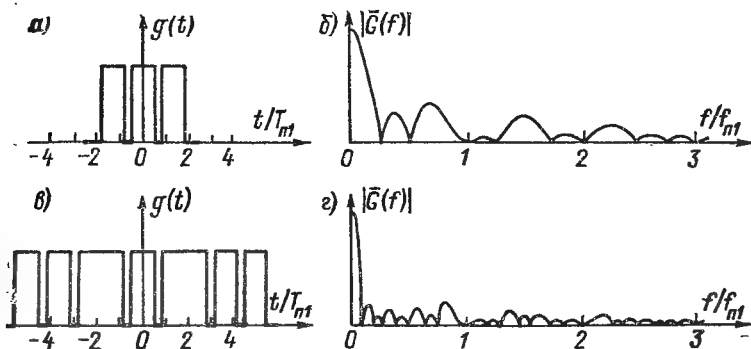


Рис. 37. Равноамплитудные ВФ (а, б), сконструированные на основе полинома Φ_3 , и их АЧХ (б, з)

ВФ или равной ему, то мы получим равноамплитудную ступенчатую ВФ.

Сказанное удобнее всего пояснить конкретным примером. Пусть требуется сконструировать ВФ третьего порядка для подавления помехи частотой 50 Гц. Эта ВФ будет иметь три разнесенных нуля АЧХ в районе частоты 50 Гц. Для получения каждого из нулей в характеристический полином может быть введен множитель, равный, например, циклотомическому полиному $\Phi_2(z)$. Причем параметр z в каждом из полиномов $\Phi_2(z)$ должен иметь свой индекс, поскольку каждому из этих полиномов будет соответствовать свой интервал между импульсами ВФ. Итак, в рассматриваемом примере

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2, z_3) &= \Phi_2(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_2(z_3) = \\ &= (z_1 + 1)(z_2 + 1)(z_3 + 1) = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 + \\ &\quad + z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_1 + z_2 + z_3 + 1. \end{aligned} \quad (224)$$

Выберем для z_1, z_2, z_3 следующие интервалы между импульсами: $T_{21} = 10$ мс; $T_{22} = 9,8$ мс; $T_{23} = 10,2$ мс. Такие интервалы обеспечат нули АЧХ на

частотах 50 Гц; 51,02 Гц; 49,02 Гц. При этом произведению $z_1 z_2 z_3$ соответствует импульс, удаленный от начала ВФ на $10 + 9,8 + 10,2 = 30$ мс, произведению $z_1 z_2$ — на $10 + 9,8 = 19,8$ мс и т. д. Всего рассматриваемая дискретная ВФ, как следует из ее характеристического полинома, содержит 8 импульсов (рис. 38, а). Наименьшее расстояние между импульсами по времени равно 0,2 мс (например, между импульсами, соответствующими произведениям $z_1 z_2$ и

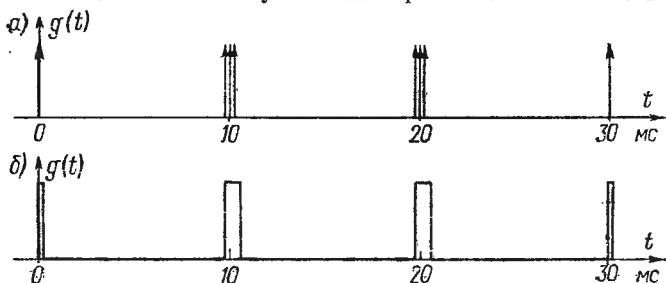


Рис. 38. Дискретная (а) и ступенчатая (б) равноамплитудные ВФ с тремя разнесенными нулями в районе 50 Гц

$z_2 z_3$). Поэтому, переходя к ступенчатой ВФ, заменим δ -импульсы на прямоугольные импульсы длительностью $T_n = 0,2$ мс. В итоге получим равноамплитудную ВФ, показанную на рис. 38, б. Вследствие слияния примыкающих импульсов эта ВФ содержит всего четыре прямоугольных импульса, длительности которых соотносятся как 1-3-3-1.

Полученная таким путем ВФ третьего порядка (рис. 38, б) короче, чем подобная ВФ, сконструированная ранее и показанная на рис. 36, д. Однако овыешение быстродействия фильтра оплачено потерей нулей АЧХ на четных гармониках помехи: 2-й, 4-й, 6-й и т. д. АЧХ весовой функции на рис. 38, б описывается соотношением

$$|\bar{G}(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f T_n)}{\pi f T_n} \cos(\pi f T_{21}) \cos(\pi f T_{22}) \cos(\pi f T_{23}) \right|, \quad (225)$$

где T_n — длительность импульса ВФ (в нашем примере 0,2 мс).

Если подавление второй гармоники помехи обязательно, то в характеристический полином (224) можно ввести множитель $\Phi_2(z_4) = z_4 + 1$ и поставить ему в соответствие интервал T_{24} , равный полупериоду

второй гармоники помехи, т. е. $T_{24} = 5$ мс. Этот множитель обеспечит подавление 2-й, 6-й, 10-й, ... гармоник помехи. Точно так же можно далее ввести множитель $\Phi_2(z_5)$, добавляющий нули АЧХ на 4-й, 12-й, ... гармониках помехи. Однако, вводя все новые множители в характеристический полином, нужно следить за тем, чтобы не получать совпадающие по времени импульсы дискретной ВФ. Это обстоятельство заставляет, в частности, устанавливать нули АЧХ не непосредственно на частотах, подлежащих подавлению гармоник помехи, а с некоторым сдвигом.

Описание равноамплитудных ВФ, сконструированных с помощью данного метода, а также особенностей его применения можно найти в работах [25, 34].

ВФ с широтно-импульсной или частотно-импульсной модуляцией. Равноамплитудные ВФ могут быть получены как приближенные эквиваленты соответствующих неравноамплитудных ВФ. При этом изменение амплитуды ВФ заменяют изменением коэффициента заполнения последовательности прямоугольных импульсов. Этот коэффициент можно изменять за счет изменения длительности импульсов, следующих друг за другом с постоянной частотой, или за счет изменения частоты импульсов постоянной длительности.

На рис. 39 показана некоторая исходная симметричная ступенчатая ВФ $g_1(t)$ с положительными весовыми коэффициентами и соответствующие ей равноамплитудные ВФ с широтно-импульсной модуляцией $g_2(t)$ и с частотно-импульсной модуляцией $g_3(t)$. Найдем формулу АЧХ для весовой функции $g_2(t)$.

Пусть длительность каждой ступени исходной ВФ $g_1(t)$ равна T_2 . Для определенности будем считать, что число ступеней ВФ N — четное. Рассмотрим пару ступеней ВФ $g_1(t)$, симметричных относительно середины ВФ и имеющих номера i и $N - i - 1$. Таким двум ступеням в равноамплитудной ВФ соответствуют две пачки импульсов по n_i штук импульсов в каждой. Эти две пачки импульсов можно представить как свертку во временной области гребенчатой ВФ и пары δ -импульсов, удаленных друг от друга во времени на $(N - 2i - 1)T_2$. Поэтому спектр этих двух пачек можно найти как произведение спектра гребенчатой ВФ, определяемого формулой (219), и спектра пары

δ -импульсов, равного $2 \cos [\pi f (N - 2i - 1) T_2]$. АЧХ рассматриваемой равноамплитудной ВФ найдем

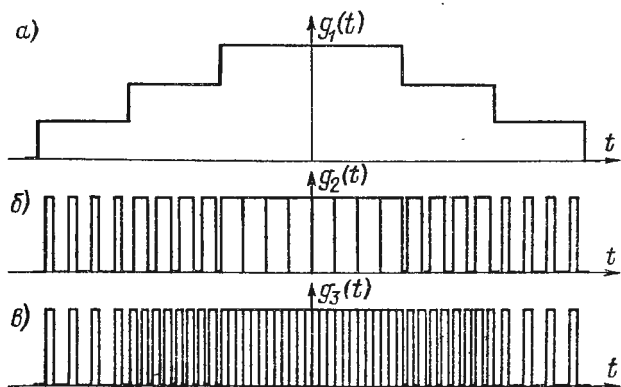


Рис. 39. Ступенчатая ВФ-прототип (а) и соответствующие ей равноамплитудные ВФ с широтно-импульсной (б) и частотно-импульсной (в) модуляцией

как модуль суммы спектров всех пар пачек импульсов

$$|\bar{G}(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f T_2)}{\pi f T_2} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\sin \frac{\mu_i \pi f T_2}{n_i} \cos [\pi f T_2 (N - 2i - 1)]}{\sin(\pi f T_2 / n_i)} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \mu_i \right)^{-1} \right|, \quad (226)$$

где μ_i — отношение длительности импульса к длительности интервалов между фронтами соседних импульсов.

При широтно-импульсной модуляции целесообразно установить $n_0 = n_1 = \dots = n_i = n$. Коэффициент заполнения пачки импульсов при этом будет определяться коэффициентом μ_i . Коэффициенты μ_i в простейшем случае могут быть приняты пропорциональными весовым коэффициентам a_i исходной ступенчатой весовой функции — прототипа. В частности, можно принять $\mu_i = a_i / a_{\max}$, где $a_{\max}$ — максимальный весовой коэффициент. Тогда той ступени исход-

ной ВФ, которая имеет максимальную амплитуду, будут соответствовать примыкающие импульсы широтно-импульсно-модулированной ВФ.

При принятых условиях (226) преобразуется к виду

$$|\bar{G}(f)| = \left| \frac{\sin(\pi f T_2)}{\pi f T_2} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\sin \frac{a_i \pi f T_2}{n a_{\max}} \cos[\pi f T_2 (N - 2i - 1)]}{\sin(\pi f T_2 / n)} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} \mu_i \right)^{-1} \right|. \quad (227)$$

Для исходной ступенчатой ВФ — прототипа справедливо соотношение

$$|\bar{G}(f)| = \\ = \left| \frac{\sin \pi f T_2}{\pi f T_2} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} a_i \cos[\pi f T_2 (N - 2i - 1)] \left(\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} a_i \right)^{-1} \right|. \quad (228)$$

Сравнивая (227) и (228), видим, что при неограниченном увеличении числа импульсов n широтно-импульсно-модулированной ВФ АЧХ, соответствующая этой ВФ, будет такой же, как и АЧХ для ВФ-прототипа. Реально же эти две АЧХ несколько различаются. Чтобы это различие находилось в допустимых пределах, нужно выбирать n достаточно большим. Однако можно поступить и по-другому. Если для нас существенна близость двух АЧХ в районе некоторой частоты f_x , то можно этого добиться соответствующей коррекцией коэффициентов μ_i . Как следует из сравнения формул (226) и (228), цель будет достигнута, если найти μ_i из уравнения

$$\frac{\sin(\mu_i \pi f_x T_2 / n)}{\sin(\pi f_x T_2 / n)} = \frac{a_i}{a_{\max}}. \quad (229)$$

Таким путем можно получить, например, широтно-импульсно-модулированную равноамплитудную ВФ с желаемой АЧХ в районе основной гармоник помехи. Однако для высших гармоник помехи АЧХ

равноамплитудной ВФ и ВФ-прототипа могут при этом существенно различаться.

Мы проанализировали случай широтно-импульсной модуляции. Читатель без труда может проделать то же самое для частотно-импульсной модуляции и убедиться в отсутствии существенных различий между получаемыми при этом двумя видами равноамплитудных ВФ.

Равноамплитудные ВФ, полученные путем перемножения циклотомических полиномов. В § 24 мы

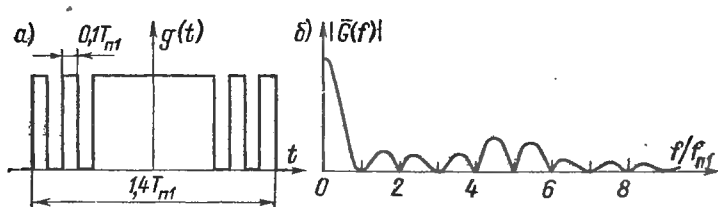


Рис. 40. Равноамплитудная ВФ (а) с длительностью ступени, равной $T_{\text{п}}/10$, и соответствующая ей АЧХ (б)

рассмотрели метод синтеза ВФ, основанный на перемножении циклотомических полиномов. В процессе такого синтеза могут быть получены и равноамплитудные ВФ. Примером тому может быть ВФ, найденная в § 24 и показанная на рис. 33, а. В настоящее время неизвестен общий метод синтеза равноамплитудных ВФ, основанный на непосредственном перемножении циклотомических полиномов, зависящих от одного аргумента. Однако полученные таким путем отдельные ВФ заслуживают внимания. Наряду с уже упомянутой ВФ (рис. 33, а) укажем на ВФ, длительность ступени которой равна $T_{\text{п}}/10$, а характеристический полином имеет вид

$$P(z) = \Phi_{10}^2 \Phi_5 \Phi_2 = z^{13} + z^{11} + \sum_{i=0}^5 z^{9-i} + z^2 + 1. \quad (230)$$

Эта ВФ (авторское свидетельство СССР № 902244) и ее АЧХ показаны на рис. 40. Общая длительность этой ВФ равна $1,4T_{\text{п}}$, она обеспечивает двукратные нули АЧХ на основной, 3-й, 7-й и 9-й гармониках помехи.

УСРЕДНЯЮЩИЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ

27. УСРЕДНЯЮЩИЕ ОКНА

Одной из типичных задач фильтрации в измерительной технике является задача определения среднего значения входного сигнала. Иначе говоря, фильтр должен выделить постоянную составляющую входного сигнала и подавить все помехи, присутствующие в сигнале в виде флюктуаций. Спектр флюктуаций в общем случае имеет непрерывный характер. Высокочастотные составляющие этого спектра обычно довольно эффективно могут быть ослаблены с помощью простого пассивного фильтра нижних частот. Построение же фильтра для низкочастотных составляющих помех может вызвать определенные трудности. Во-первых, инерционность этого фильтра может оказаться недопустимо большой, во-вторых, могут оказаться неприемлемыми габариты фильтра и, в-третьих, фильтр может отрицательно повлиять на точность измерительного канала. В таких случаях часто оказывается оправданным применение усредняющего КИХ-фильтра, основанного на реализации специальной весовой функции конечной длительности.

Весовые функции усредняющих КИХ-фильтров принято называть временными окнами. Мы как бы смотрим на исследуемый процесс через окно весовой функции. Прежде чем описывать различные окна, кратко определим основные параметры, которыми они могут характеризоваться.

Очевидно, что в идеальном случае спектр окна (или, что то же самое, АЧХ усредняющего фильтра) должен совпадать с АЧХ идеального фильтра нижних частот, имеющего предельно узкую полосу пропускания. Однако такой идеальный вариант невозможен. Спектр весовой функции конечной длительности отличен от нуля на бесконечном частотном промежутке [28]. Иначе говоря, ограниченная по времени функция принципиально имеет неограниченный по частоте спектр. Справедливо и дуальное положение: функция

с ограниченным по частоте спектром имеет бесконечную протяженность во времени.

Итак, идеального окна не существует, но качество реальных окон можно оценивать по степени их приближения к идеальному. Типичный вид усредняющего окна и его спектра показан на рис. 41. Кривая спектра имеет основной лепесток в районе нулевой частоты, и далее идут боковые лепестки. Следует, однако, заметить, что существуют окна, спектр которых не

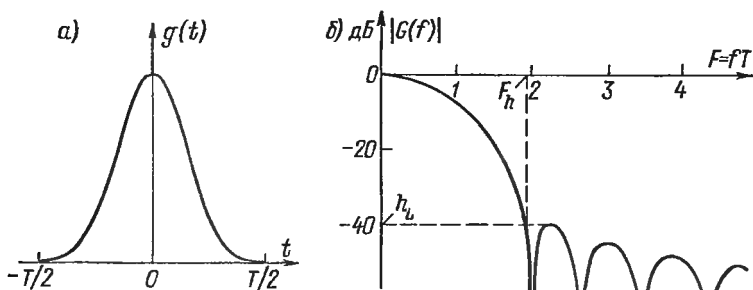


Рис. 41. Пример усредняющего окна — окно Кайзера—Бесселя (а) и его спектр (б)

имеет явно выраженных боковых лепестков. В этом случае ширину основного лепестка определяют условно по некоторому уровню модуля спектра.

Идеальный усредняющий фильтр должен иметь предельно узкую полосу пропускания; соответственно этому реальное окно может быть охарактеризовано шириной основного лепестка спектра: чем меньше эта ширина, тем лучше окно. В § 3 было показано, что сжатие функции по времени в a раз приводит к расширению ее спектра по частоте также в a раз. Поэтому качество окна определяют приведенной шириной основного лепестка F_h , равной произведению ширины основного лепестка АЧХ и длительности ВФ. Поясним смысл этого параметра. Пусть требуется подавлять пульсации сигнала в некотором частотном диапазоне, начиная с частоты f_c . Зная параметр окна F_h , находим, что длительность окна должна быть установлена равной $T = F_h/f_c$. Таким образом, чем меньше F_h , тем при прочих равных условиях более быстродействующий КИХ-фильтр может быть реализован на основе данного окна. Ширину основного ле-

пестка будем определять по уровню максимального бокового лепестка.

Обратим внимание на то, что мы принимаем ширину основного лепестка равной полосе частот от нуля до f_h , т. е. рассматриваем физический спектр ВФ. Если же анализировать теоретический спектр ВФ, то он будет четно-симметричным и тогда основной лепесток АЧХ будет простирается от $-f_h$ до $+f_h$, т. е. его ширина будет равна $2f_h$.

Идеальный усредняющий фильтр должен иметь АЧХ с равными нулю боковыми лепестками. Реальные усредняющие окна мы будем характеризовать уровнем боковых лепестков h : отношением амплитуды наибольшего бокового лепестка к амплитуде основного лепестка. Часто уровень боковых лепестков измеряют в децибелах.

Рассмотрим, как изменяется в общем случае амплитуда боковых лепестков спектра усредняющего окна при увеличении частоты.

Как мы знаем, модуль спектра δ -импульса имеет одно и то же значение на всех частотах. Поэтому, если бы в весовой функции окна присутствовала аддитивная составляющая в виде δ -импульса, то амплитуда боковых лепестков спектра такого окна не убывала бы с ростом частоты. Реальные окна не имеют таких составляющих. Однако усредняющие окна могут иметь разрывы первого рода — скачкообразные изменения амплитуды. Это значит, что первая производная окна содержит δ -импульсы. Интегрирование некоторой функции времени приводит к делению ее спектра на $j2\pi f$ (см. § 3). Если производная функции содержит δ -импульсы, то спектр этой производной не убывает с ростом частоты. А значит, спектр самой функции будет убывать обратно пропорционально частоте. В таких случаях говорят, что с увеличением частоты f спектр убывает со скоростью $1/f$ [15].

Если кривая окна не имеет разрывов, но имеет изломы, то это значит, что первая производная окна имеет разрывы первого рода, а вторая производная содержит δ -импульсы. Спектр такого окна будет убывать со скоростью $1/f^2$. Рассуждая таким образом, приходим к заключению, что если сама функция и ее первые $n - 1$ производных не имеют разрывов, а n -я производная имеет разрывы первого рода, то спектр такой функции убывает со скоростью $1/f^{n+1}$.

В настоящее время известно большое число усредняющих окон, предложенных в разное время различными авторами. Достаточно полные сведения об этих окнах можно найти в литературе [21, 29].

В табл. 5 даны параметры некоторых часто употребляемых окон. В этой таблице наряду с уровнем

Таблица 5. Параметры усредняющих окон

Вид окна	Формула	h_L , дБ	F_h	$F_{0,71}$	$F_{0,99}$	v
Окно Дирихле	(231)	-13,3	0,82	0,44	0,07	$1/f$
Окно Бартлетта	(232)	-26,6	1,63	0,64	0,11	$1/f^2$
Окно Парзена	(233)	-53,1	3,26	0,91	0,15	$1/f^4$
Окно Ханна	(235)	-31,5	1,88	0,71	0,12	$1/f^3$
Окно Хэмминга	(237)	-42,7	1,92	0,65	0,11	$1/f$
Окно Блэкмана	(239)	-58,2	2,83	0,82	0,14	$1/f^3$
Окно Блэкмана — Хэрриса	(241)	-90,1	3,94	0,94	0,16	$1/f^3$
Плосковершинное окно	(243)	-81,1	4,84	1,86	0,75	$1/f$
Окно Рисса	(245)	-21,3	1,28	0,58	0,10	$1/f^2$
Окно Коши, $\alpha = 3$	(246)	-30,8	3,25	0,67	0,11	$1/f$
Окно Римана	(247)	-26,5	1,51	0,62	0,10	$1/f^2$
Окно Гаусса, $\alpha = 3$	(248)	-55,9	3,34	0,80	0,13	$1/f$

боковых лепестков h указаны также значения приведенной ширины основного лепестка по уровню боковых лепестков F_h , по уровню 0,71 (т. е. при спаде АЧХ на 3 дБ) и по уровню 0,99 (т. е. при спаде АЧХ на 1 %), а также скорость спада амплитуды боковых лепестков с ростом частоты v . Кроме того, в таблице приведены номера формул, описывающих соответствующие окна.

Окно Дирихле, или естественное окно, — это П-образная весовая функция $\Pi(t, T)$:

$$g(t) = 1; \quad |t| \leq T/2. \quad (231)$$

Предполагается, что окно Дирихле так же, как и все другие окна, описываемые в данном параграфе, действует на временном промежутке $-T/2 \leq t \leq T/2$. За пределами этого промежутка $g(t) = 0$. Вообще говоря, размерность весовой функции должна совпадать с размерностью частоты. Но обычно весовые функции, соответствующие усредняющим окнам, приводятся к виду, когда они не имеют размерности.

Спектр окна Дирихле, как известно, определяется формулой

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}.$$

Окно Бартлетта, или треугольное окно, — это свертка двух прямоугольников половинной длительности

$$g(t) = 1 - |t|/(T/2); \quad |t| \leq T/2. \quad (232)$$

Частотная характеристика фильтра, соответствующего этому окну, равна квадрату спектра прямоугольника длительностью $T/2$:

$$\bar{G}(f) = \left[\frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f T/2} \right]^2.$$

Окно Парзена — это свертка двух треугольников половинной длительности, оно описывается соотношениями

$$g(t) = 1 - 24|t/T|^2 + 48|t/T|^3, \quad |t| \leq T/4; \quad (233)$$

$$g(t) = 2(1 - 2|t/T|)^3, \quad T/4 < |t| \leq T/2.$$

Частотная характеристика этого окна имеет вид

$$\bar{G}(f) = \left[\frac{\sin(\pi f T/4)}{\pi f T/4} \right]^4. \quad (234)$$

Из данных табл. 5 видно, что при переходе от окна Дирихле к окну Бартлетта и далее к окну Парзена уровень боковых лепестков снижается, но вместе с тем увеличивается ширина основного лепестка.

Окно Ханна (это окно называют также хэннингом) — это один период косинусоиды, приподнятой на величину амплитуды:

$$g(t) = 0,5 + 0,5 \cos(2\pi t/T), \quad |t| \leq T/2. \quad (235)$$

Для этого окна

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \frac{1}{1 - (fT)^2}. \quad (236)$$

Окно Хэмминга отличается от окна Ханна лишь коэффициентами

$$g(t) = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi t/T), \quad |t| \leq T/2. \quad (237)$$

Соответственно и ЧХ этого окна имеет сходный вид

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left[1 + \frac{0,46}{0,54} \frac{(fT)^2}{1 - (fT)^2} \right]. \quad (238)$$

Окна Блэкмана, Блэкмана — Хэрриса и плосковершинное так же, как и окна Ханна и Хэмминга, описываются конечными тригонометрическими рядами. Приведем формулы, описывающие эти окна и их спектры.

Окно Блэкмана:

$$g(t) = 0,42 + 0,5 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0,08 \cos \frac{4\pi t}{T}, \quad |t| \leq \frac{T}{2}; \quad (239)$$

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left[1 + \frac{0,5}{0,42} \frac{(fT)^2}{1 - (fT)^2} - \frac{0,08}{0,42} \frac{(fT)^2}{4 - (fT)^2} \right]. \quad (240)$$

Окно Блэкмана — Хэрриса:

$$g(t) = 0,3587 + 0,4883 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0,1413 \cos \frac{4\pi t}{T} + 0,0117 \frac{6\pi t}{T}, \quad |t| \leq T/2; \quad (241)$$

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left[1 + \frac{0,4883}{0,3587} \frac{(fT)^2}{1 - (fT)^2} - \frac{0,1413}{0,3587} \frac{(fT)^2}{4 - (fT)^2} + \frac{0,0117}{0,3587} \frac{(fT)^2}{9 - (fT)^2} \right]. \quad (242)$$

Плосковершинное окно:

$$g(t) = 1 + 1,933 \cos(2\pi t/T) + 1,286 \cos(4\pi t/T) + 0,388 \cos(6\pi t/T) + 0,032 \cos(8\pi t/T), \quad |t| \leq T/2; \quad (243)$$

$$\bar{G}(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \left[1 + \frac{1,93}{1 - (fT)^2} - \frac{1,29}{4 - (fT)^2} + \frac{0,388}{9 - (fT)^2} - \frac{0,0322}{16 - (fT)^2} \right]. \quad (244)$$

Как видим, добавление новых членов в тригонометрический ряд, описывающий весовую функцию, приводит к расширению основного лепестка АЧХ фильтра, реализующего эту ВФ, но вместе с тем появляется возможность усилить какие-то положительные качества фильтра. Для окна Блэкмана — Хэрриса [29] коэффициенты ряда подобраны так, чтобы минимизировать уровень боковых лепестков. В статье [29] дается несколько вариантов коэффициентов для этого окна с разными параметрами h и F_h .

Плосковершинное окно [36] сконструировано так, чтобы получить максимально плоскую вершину основного лепестка АЧХ. Это дает возможность использо-

вать окно не только тогда, когда нужно выделить постоянную составляющую, но и тогда, когда выделению подлежит низкочастотная составляющая входного сигнала.

Наряду с упомянутыми известно достаточно большое число и других усредняющих окон. Среди них можно, например, отметить окно Рисса:

$$g(t) = 1 - (2t/T)^2, \quad |t| \leq T/2; \quad (245)$$

окно Коши:

$$g(t) = \frac{1}{1 + (2\alpha t/T)^2}; \quad |t| \leq T/2; \quad (246)$$

окно Римана:

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi t/T)}{2\pi t/T}, \quad |t| \leq T/2; \quad (247)$$

окно Гаусса:

$$g(t) = e^{-2(\alpha t/T)^2}, \quad |t| \leq T/2, \quad (248)$$

где α — коэффициент, изменяя который, можно в некоторых пределах менять параметры окна. Известны также окна, полученные путем перемножения или свертки более простых окон.

Все упомянутые здесь окна — непрерывные функции времени. Однако, как уже говорилось, непрерывные весовые функции трудно воспроизводить на практике. Поэтому обычно применяют дискретные или ступенчатые аналоги этих окон. Переход к дискретному или ступенчатому аналогу весовой функции мало влияет на параметры АЧХ, приведенные в табл. 5. Но, как мы видели из материала § 11, такой переход приводит к периодическому повторению спектра. Вследствие этого основной лепесток АЧХ фильтра будет повторяться с периодом, равным частоте дискретизации. Фильтр на основе непрерывного окна подавляет все пульсации сигнала с частотами от f_h и выше. Дискретный же или импульсный аналог этого фильтра будет иметь АЧХ, в которой низкочастотная полоса заграждения простирается от f_h до $f_2 - f_h$, где f_2 — частота дискретизации.

Если использовать ступенчатый аналог непрерывной ВФ, то исходный спектр ВФ, как мы знаем, не только периодически повторяется, но и умножается на функцию $(\sin \pi f T_2) / (\pi f T_2)$, где $T_2 = 1/f_2$. Это приводит к изменению формы и уменьшению амплитуды повторений основного лепестка спектра.

В принципе можно так выбрать частоту дискретизации, что эта уменьшенная амплитуда основного лепестка не будет превышать амплитуду наибольшего из боковых лепестков, и тогда переход от непрерывной к ступенчатой ВФ не уменьшит ширину полосы заграждения фильтра.

Весовые коэффициенты $a(n)$ дискретной или импульсной ВФ могут быть определены на основе соотношения, описывающего непрерывную ВФ $g(t)$:

$$a(n) = g(t_n).$$

При определении моментов времени t_n , соответствующих отсчетам дискретной ВФ, нужно учитывать два обстоятельства. Во-первых, непрерывные ВФ мы рассматривали на промежутке от $-T/2$ до $+T/2$, в то время как для дискретных ВФ номер импульса изменяется от 0 до $N-1$. Во-вторых, возможны два способа дискретизации ограниченной по времени непрерывной функции. При первом способе промежуток времени T , на котором задана непрерывная ВФ, делится на N равных интервалов T_2 и берутся отсчеты ВФ, соответствующие серединам этих интервалов. В этом случае

$$a(n) = g(t_n) = g\left(\frac{T}{2} \frac{2n - N + 1}{N}\right). \quad (249)$$

При втором способе промежуток времени T , где задана непрерывная ВФ, делится на $N-1$ равных интервалов T_2 и находятся отсчеты ВФ, соответствующие границам этих интервалов. При этом амплитуды крайних отсчетов, для которых $n=0$ и $n=N-1$, уменьшаются вдвое. В итоге получаем

$$a(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} g\left(\frac{T}{2} \frac{2n - N + 1}{N - 1}\right) & \text{при } n=0, n=N-1; \\ g\left(\frac{T}{2} \frac{2n - N + 1}{N - 1}\right) & \text{при } 0 < n < N-1. \end{cases} \quad (250)$$

АЧХ дискретной ВФ может быть найдена исходя из формулы (172)

$$|G_d(\bar{f})| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j2\pi n \bar{f}} \right|,$$

где $\bar{f} = fT_2$. Весовые функции, рассматриваемые в настоящей главе, всегда симметричны. Учитывая этот

факт, нетрудно получить для четных N

$$|G_d(\bar{f})| = 2 \left| \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a(n) \cos[\pi \bar{f}(N-2n-1)] \right| \quad (251)$$

и для нечетных N

$$|G_d(\bar{f})| = \left| \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} a(n) \cos[\pi \bar{f}(N-2n-1)] + a\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \right|. \quad (252)$$

В случае ступенчатых весовых функций следует внести в правую часть соотношений (251) и (252) множитель $|(\sin \pi \bar{f})/(\pi \bar{f})|$.

28. ОПТИМАЛЬНЫЕ УСРЕДНЯЮЩИЕ ОКНА

Достоинством упомянутых в предыдущем параграфе окон является простота их математического описания и, как следствие, в некоторых случаях — простота реализации. Однако эти окна по многим критериям не являются наилучшими.

Известны также оптимальные в том или ином смысле окна.

При конструировании окна можно, например, стремиться минимизировать энергию боковых лепестков спектра. Оптимальное по этому критерию окно, описываемое с помощью вытянутых сфероидальных функций, было найдено Слепяном, Поллаком и Ландау [29]. Достаточно простая аппроксимация этого оптимального окна была предложена Кайзером и получила название окна Кайзера или окна Кайзера — Бесселя. Это окно описывается соотношением [5]

$$g(t) = \frac{I_0[2\pi\alpha\sqrt{1-(2t/T)^2}]}{I_0(2\pi\alpha)}; \quad |t| \leq T/2, \quad (253)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; α — константа, определяющая компромисс между максимальным уровнем боковых лепестков и шириной основного лепестка

спектра окна. Окно Кайзера является оптимальным в том смысле, что оно обеспечивает минимум энергии спектра за пределами некоторой заданной частоты [24].

Модифицированная функция Бесселя, используемая в (253), может быть найдена с помощью ряда

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2. \quad (254)$$

Начиная с некоторого k , члены этого ряда монотонно убывают, и при вычислении на ЭВМ можно ограничить число суммируемых членов тогда, когда очередной член окажется меньше некоторой заданной величины. Однако следует иметь в виду, что все члены ряда положительны и поэтому остаток ряда будет больше первого отбрасываемого члена ряда.

Спектр окна Кайзера или, что то же самое, частотная характеристика фильтра, реализующего весовую функцию (253), описывается соотношениями

$$\bar{G}(f) = \begin{cases} \frac{\alpha \operatorname{sh} [\pi \sqrt{\alpha^2 - (fT)^2}]}{\sqrt{\alpha^2 - (fT)^2} \operatorname{sh} (\pi\alpha)}, & fT \leq \alpha; \\ \frac{\alpha \sin [\pi \sqrt{(fT)^2 - \alpha^2}]}{\sqrt{(fT)^2 - \alpha^2} \operatorname{sh} (\pi\alpha)}, & fT \geq \alpha. \end{cases} \quad (255)$$

Изменяя коэффициент α , можно изменять ширину основного лепестка АЧХ F_h и уровень боковых лепестков h . Связь между этими двумя параметрами АЧХ для окна Кайзера определяется приближенным соотношением

$$F_h = f_h T \approx 0,31 + 0,04 |h_L|. \quad (256)$$

Если, например, требуется подавлять помеху не менее чем на 40 дБ, то тогда приведенная ширина основного лепестка окна Кайзера будет равна $F_h = 0,31 + 0,04 \cdot 40 \approx 1,9$. Иначе говоря, длительность весовой функции T в данном случае будет в 1,9 раза больше периода самой низкочастотной подавляемой помехи: $T \approx 1,9/f_h$. На приведенном выше рис. 41 показана весовая функция Кайзера и ее спектр для $\alpha = 1,73$. Именно при таком значении константы α уровень боковых лепестков h_L равен —40 дБ.

При заданном уровне h_L определить значение α , необходимое для расчета окна по формуле (253),

можно с помощью приближенного соотношения

$$\alpha \approx 0,043 |h_L|. \quad (257)$$

При синтезе усредняющего окна можно стремиться к уменьшению уровня боковых лепестков при заданной ширине основного лепестка. Это стремление является естественным, если учесть, что при оценке помехозащищенности измерительного устройства в качестве его количественной оценки приводят наименьшее значение коэффициента помехоподавления в некоторой полосе частот. Это значение соответствует наибольшему по уровню боковому лепестку АЧХ в рассматриваемой частотной полосе. Оптимальным в этом смысле является окно Дольфа — Чебышева, оно обеспечивает минимальный уровень боковых лепестков АЧХ h при заданной ширине основного лепестка F_h или минимальную ширину основного лепестка F_h при заданном уровне боковых лепестков h .

Все рассмотренные выше окна представляли собой непрерывные функции времени t . Как уже говорилось, с помощью формул (249) и (250) можно переходить от непрерывных окон к дискретным. Отличительной особенностью окна Дольфа — Чебышева является то, что оно сразу было разработано в виде дискретной функции. Непрерывный аналог этой функции не найден.

Частотная характеристика фильтра, реализующего ВФ Дольфа — Чебышева, описывается формулой

$$G(f) = hT_{N-1}[z_0 \cos(\pi f T_2)], \quad (258)$$

где $T_{N-1}(z)$ — полином Чебышева первого рода $(N-1)$ -го порядка, определяемый по (157), или

$$T_{N-1}(z) = \begin{cases} \cos[(N-1) \arccos z], & |z| \leq 1; \\ \operatorname{ch}[(N-1) \operatorname{arch}|z|], & |z| \geq 1. \end{cases} \quad (259)$$

Входящий в (258) параметр z_0 определяется исходя из заданного уровня боковых лепестков h :

$$z_0 = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{N-1} \operatorname{arch} \frac{1}{h}\right). \quad (260)$$

На рис. 42 показан вид весовой функции Дольфа — Чебышева и ее спектр. Так как эта ВФ имеет дискретный характер (N «штук» δ -импульсов), то и АЧХ, соответствующая окну Дольфа — Чебышева, имеет вид периодической кривой. Между основным

лепестком АЧХ и его повторением располагается $N - 2$ боковых лепестков, имеющих одинаковую амплитуду. Амплитуда основного лепестка (и его повторений) равна единице. Амплитуды боковых лепестков равны h .

Весовые коэффициенты ВФ Дольфа — Чебышева обычно определяются методом частотных выборок.

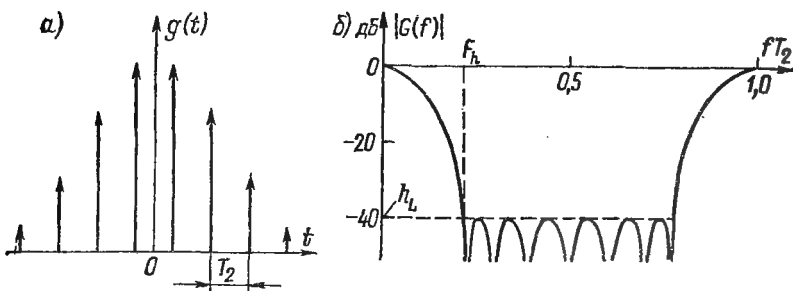


Рис. 42. Весовая функция Дольфа — Чебышева (а) и ее спектр (б)

Суть метода заключается в том, что вначале находят N равноотстоящих отсчетов частотной характеристики, а затем методом обратного дискретного преобразования Фурье определяют весовые коэффициенты $a(n)$. Равноотстоящие отсчеты ЧХ определяются следующим соотношением:

$$b(k) = hT_{N-1} \left(z_0 \cos \frac{\pi k}{N} \right). \quad (261)$$

Для определения коэффициентов $a(n)$ можно использовать формулы ОДПФ (105) и (107). Чтобы получить спектр ВФ в виде (258), в эти формулы нужно ввести коэффициент $1/N$. В итоге получаем

$$a(n) = \frac{1}{N} \left\{ b(0) + 2 \sum_{k=1}^M (-1)^k b(k) \cos \left[\frac{\pi k}{N} (2n+1) \right] \right\}, \quad (262)$$

где $M = N/2 - 1$ при четном N и $M = (N-1)/2$ при нечетном N .

Весовые коэффициенты ВФ Дольфа — Чебышева можно также найти непосредственно, без обратного дискретного преобразования Фурье, если воспользо-

ваться формулой

$$a(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (N-k-2)! z_0^{-2k}}{(N-n-k-1)! k (n-k)!} \quad (263)$$

По этой формуле находят коэффициенты $a(n)$ для n от 0 до $N/2-1$ при четном N и от 0 до $(N-1)/2$ при нечетном N . Остальные коэффициенты определяются из условия четной симметрии ВФ. Значения

Таблица 6. Коэффициенты $r(k)$ для определения ВФ
Дольфа — Чебышева

N	n	$r(0)$	$r(1)$	$r(2)$	$r(3)$	$r(4)$	$r(5)$	$r(6)$	$r(7)$
8	1	7	7						
	2	21	35	14					
	3	35	70	42	7				
10	1	9	9						
	2	36	63	27					
	3	84	189	135	30				
	4	126	315	270	90	9			
16	1	15	15						
	2	105	195	90					
	3	455	1170	990	275				
	4	1365	4290	4950	2475	450			
	5	3003	10725	14850	9900	3150	378		
	6	5005	19305	29700	23100	9450	1890	140	
	7	6435	25740	41580	34650	15750	3780	420	15

факториалов, содержащихся в числителе и знаменателе правой части соотношения (263), быстро возрастают с ростом N . Поэтому непосредственный расчет коэффициентов с помощью этого соотношения целесообразно проводить при N , не превосходящем 20—30.

Для $N = 8; 10; 16$ в табл. 6 приведены вычисленные с помощью формулы (263) значения коэффициентов $r(k)$, позволяющие быстро найти весовые коэффициенты ВФ Дольфа — Чебышева с помощью ряда

$$a(n) = \sum_{k=0}^n r(k) (-1/z_0^2)^k \quad (264)$$

Поскольку $a(0) = 1$ для всех N , то значения коэффициентов $r(k)$ для $n=0$ в табл. 6 не указаны. Значения параметра $1/z_0^2$, входящие в (260), приведены в табл. 7. Если, например, требуется найти весовой

Таблица 7. Коэффициенты $1/z_0^2$ для определения ВФ
Дольфа — Чебышева

N	Значение $1/z_0^2$ при h_L равно				
	-20 дБ	-40 дБ	-60 дБ	-80 дБ	-100 дБ
8	0,837	0,5914	0,36741	0,210558	0,115164
10	0,897	0,7202	0,52637	0,358979	0,233472
16	0,961	0,8849	0,78155	0,665317	0,548890

коэффициент $a(2)$ для весовой функции Дольфа — Чебышева, состоящей из десяти импульсов и подавляющей помеху на 40 дБ, то следует поступить следующим образом. Из табл. 6 для $N=10$ и $n=2$ находим $r(0)=36$, $r(1)=63$, $r(2)=27$. Далее из табл. 7 для $N=10$ и $h_L=-40$ дБ находим $1/z_0^2=0,7202$. И наконец, определяем искомый весовой коэффициент $a(2)=36+63 \cdot (-0,7202)+27 \cdot (-0,7202)^2=4,632$.

Ширина основного лепестка АЧХ фильтра, реализующего весовую функцию Дольфа — Чебышева, может быть найдена из условий равенства единице аргумента полинома Чебышева (258). После простых преобразований получаем

$$f_h = \frac{1}{\pi T_2} \arccos \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1}{N-1} \operatorname{arch} \frac{1}{h} \right) \right]^{-1}. \quad (265)$$

Приведенная ширина основного лепестка АЧХ соответственно равна

$$F_h = NT_2 f_h = \frac{N}{\pi} \arccos \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1}{N-1} \operatorname{arch} \frac{1}{h} \right) \right]^{-1}. \quad (266)$$

Вообще говоря, ВФ, состоящая из N δ -импульсов, имеет длительность $T=(N-1)T_2$. Мы же в (266) приняли $T=NT_2$ с тем, чтобы распространить затем значения параметра F_h и на ступенчатый аналог весовой функции Дольфа — Чебышева. При заданном уровне боковых лепестков h приведенная ширина основного лепестка несколько зависит от числа импуль-

сов ВФ N . Однако при $N \geq 16$ этой зависимостью можно пренебречь. И тогда F_h приближенно описывается линейной функцией от h_L

$$F_h \approx 0,22 + 0,037 |h_L|. \quad (267)$$

Сравнивая (257) и (267), видим, что ВФ Дольфа — Чебышева при одинаковом значении h имеет меньшую (примерно на 9—14 %) ширину основного лепестка, чем ВФ Кайзера — Бесселя. Это значит, что при одинаковой нижней границе полосы подавляемых

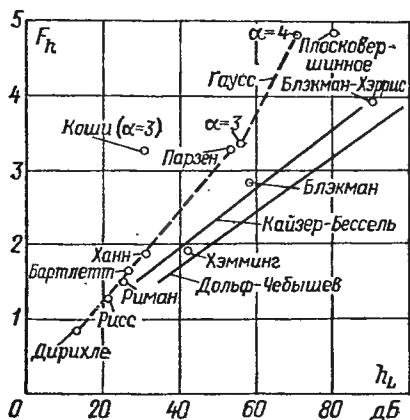


Рис. 43. Зависимость приведенной ширины F_h основного лепестка АЧХ от уровня боковых лепестков h_L для различных усредняющих ВФ

помех ВФ Дольфа — Чебышева будет иметь меньшую длительность, чем ВФ Кайзера — Бесселя.

На рис. 43 в координатах h_L , F_h показаны точки, соответствующие различным типам усредняющих окон. Чем больше $|h_L|$ при заданном F_h или чем меньше F_h при заданном h_L , тем лучше окно. Естественно, что это положение справедливо, только если оцениваем качество окна по максимальному значению АЧХ h в полосе заграждения. При таком критерии самым эффективным является окно Дольфо — Чебышева.

Если в соотношении (265) уменьшать h до нуля, то тогда получим

$$f_h = 1/(2T_2) = f_2/2.$$

Это означает, что ширина основного лепестка АЧХ равна половине частоты дискретизации. Учитывая, что основной лепесток АЧХ для дискретной ВФ, каковой и является ВФ Дольфа — Чебышева, повторяется с периодом f_2 , приходим к выводу, что ширина полосы заграждения будет равна нулю. ВФ Дольфа — Чебышева в этом случае вырождается в биномиальную ВФ. Для биномиальной ВФ, как мы знаем, характерно сведение всех нулей АЧХ в промежутке $fT_2 = 0 \div 1$ в одну точку $fT_2 = 0,5$. Такая АЧХ не является наилучшей, если задано некоторое предельно допустимое значение h . Некоторое раздвижение нулей АЧХ будет способствовать, как мы видели выше, расширению частотной полосы, в которой подавляется помеха. Оптимальному распределению нулей АЧХ по частотной оси как раз и соответствует ВФ Дольфа — Чебышева.

При подавлении сетевой помехи, частота которой может лежать в диапазоне $f_{\text{п}}(1 \pm \epsilon)$, где $\epsilon \ll 1$, средняя частота полосы заграждения должна совпадать с $f_{\text{п}}$. Отсюда следует, что T_2 должно быть равно $1/(2f_{\text{п}})$. Учитывая это, из формулы (265) нетрудно вывести соотношение, связывающее для ВФ Дольфа — Чебышева коэффициент подавления помехи $1/h$ с допустимым относительным изменением частоты помехи ϵ

$$\frac{1}{h} = \text{ch} \left[(N - 1) \text{arch} \left(\sin \frac{\pi \epsilon}{2} \right)^{-1} \right]. \quad (268)$$

Поскольку $\epsilon \ll 1$, то данное соотношение можно упростить, используя приближенные равенства $\sin \alpha \approx \alpha$, $\text{arch}(1/\alpha) \approx \ln(2/\alpha)$, $\text{ch}(1/\alpha) \approx 0,5e^{1/\alpha}$, где $\alpha \ll 1$. Переходя к логарифмической мере коэффициента подавления помехи, окончательно получим

$$h_L = 20 \lg \frac{1}{h} \approx 20 \left[(1 - N) \lg \frac{\pi \epsilon}{2} + (N - 2) \lg 2 \right]. \quad (269)$$

Для биномиальной ВФ, исходя из (198) и учитывая, что $q = N - 1$, нетрудно получить $h_L = 20(1 - N) \lg(\pi \epsilon / 2)$.

Сравнивая значения h_L для биномиальной ВФ и для ВФ Дольфа — Чебышева, видим, что оптимальное распределение нулей АЧХ по частотной оси приводит к увеличению коэффициента подавления помехи на $6(N - 2)$ децибел.

До сих пор мы рассматривали дискретную ВФ Дольфа — Чебышева. Очевидно, что приведенный анализ в значительной степени справедлив и для ступенчатой ВФ, весовые коэффициенты которой равны весовым коэффициентам ВФ Дольфа — Чебышева. Действительно, ведь АЧХ, соответствующая такой ступенчатой ВФ, отличается от АЧХ ВФ Дольфа — Чебышева только множителем $(\sin \pi f T_2) / (\pi f T_2)$. Этот множитель приведет, во-первых, к некоторому уменьшению уровня боковых лепестков и, во-вторых, к тому, что боковые лепестки перестанут быть равноамплитудными.

29. ОКНА С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Реализация ступенчатых или дискретных ВФ предполагает умножение входного сигнала на весовые коэффициенты и последующее интегрирование или суммирование получаемых произведений. Операция умножения упрощается, если весовые коэффициенты представляют собой малоразрядные целые числа. В частности, при использовании микропроцессоров переход к целочисленным весовым коэффициентам позволяет сократить время, затрачиваемое на операцию умножения, и тем самым повысить быстродействие реализуемого КИХ-фильтра. Рассмотрим возможность получения дискретных и ступенчатых усредняющих окон с целочисленными коэффициентами.

Переход от непрерывных окон к дискретным или ступенчатым реализуется с помощью формул (249) и (250). Весовые коэффициенты $a(n)$, получаемые по этим формулам, в общем случае могут содержать как целую, так и дробную часть. С помощью ЭВМ можно находить приемлемые варианты целочисленных усредняющих окон путем перебора вариантов, полученных умножением весовых коэффициентов на некоторое постоянное число и последующим округлением произведений до целого числа.

В качестве примера рассмотрим весовую функцию, состоящую из 16 импульсов и обеспечивающую подавление помехи не менее чем на 60 дБ. Будем использовать в качестве прототипа весовую функцию

Дольфа — Чебышева. Округление весовых коэффициентов приводит в общем случае к увеличению уровня боковых лепестков АЧХ, а следовательно, и к уменьшению коэффициента ослабления помех. Поэтому, чтобы обеспечить значение этого коэффициента не менее 60 дБ, возьмем весовую функцию-прототип с уровнем боковых лепестков АЧХ, равным —70 дБ. Поставим себе цель найти ВФ, весовые коэффициенты которой могли бы быть выражены однобайтным двоичным числом. Это значит, что весовые коэффициенты не должны быть более 255.

Рассчитаем по формулам (260), (261), (262) или (260) и (264) весовые коэффициенты $a(0) — a(7)$ (остальные 8 коэффициентов определяются из условий четной симметрии ВФ). Они оказываются равными $a(0) = 1$; $a(1) = 4,19$; $a(2) = 11,21$; $a(3) = 23,04$; $a(4) = 39,17$; $a(5) = 57,06$; $a(6) = 72,68$; $a(7) = 81,83$. Умножим теперь эти коэффициенты на масштабирующую постоянную m , значение которой подбирается так, чтобы в итоге наибольший весовой коэффициент $ma(7)$ был равен одному из целых чисел, лежащих в диапазоне от 128 до 255. Значения коэффициентов $ma(0) — ma(6)$ округляем до целых чисел $a_c(n)$:

$$a_c(n) = \text{Int}[ma(n) + \varepsilon],$$

где Int — оператор взятия целой части числа; ε — константа, определяющая правило округления. Целесообразно поочередно подставлять одно из трех значений этой константы: $\varepsilon = 0,5$ (в этом случае округление производится до ближайшего целого числа); $\varepsilon = \approx 0,4$ и $\varepsilon = 0,6$ (при этом округление идет с тенденцией соответственно к меньшему или к большему числу). Для каждого полученного таким путем набора целочисленных весовых коэффициентов рассчитываем АЧХ по формуле (251). После просмотра всех вариантов выбираем лучший. В данном случае наиболее приемлемые весовые коэффициенты $a(0), \dots, a(7)$ оказались следующими 2; 9; 24; 50; 85; 124; 158; 178. Полученная ВФ с целочисленными коэффициентами обеспечивает подавление помех не менее чем на 64,5 дБ в полосе частот от $fT_2 = 0,18$ до $fT_2 = 0,82$.

Подобный расчет для $N = 64$ дает следующие значения коэффициентов $a(0), \dots, a(31)$: 2; 2; 4; 5; 8; 11; 14; 19; 24; 30; 37; 45; 54; 64; 75; 87; 99; 112; 126; 139; 153; 167; 180; 193; 205; 216; 226; 235; 242; 247;

251; 253. Эта ВФ обеспечивает подавление помех на 61,7 дБ в полосе частот от $fT_2 = 0,044$ до $fT_2 = 0,956$.

Если ориентироваться на весовую функцию Дольфа — Чебышева как на прототип при поиске усредняющих окон с целочисленными весовыми коэффициентами, то тогда можно указать еще один путь для

Таблица 8. Весовые функции Дольфа — Чебышева с целочисленными коэффициентами

N	$a(0)$	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	h_L , дБ	F_h	$\sum_{n=0}^{N-1} a(n)$
4	1	2	2	1	-23,8	0,91	6
	2	5	5	2	-34,2	1,10	14
	3	8	8	3	-39,9	1,18	22
	4	11	11	4	-43,9	1,22	30
5	2	4	5	4	-24,6	1	17
	8	24	33	24	-39,7	1,33	97
	18	60	85	60	-47,6	1,46	241
	50	180	261	180	-57,2	1,59	721
6	4	10	15	15	-32,3	1,25	58
	5	15	24	24	-38,8	1,41	88
	5	20	36	36	-56,7	1,76	122
	20	90	171	171	-73,0	1,99	562
8	8	28	56	77	-47,6	1,75	338
	27	63	105	133	-34,0	1,37	656
	27	126	294	434	-63,7	2,13	1762
	49	196	420	596	-54,0	1,91	2522

достижения цели. Коэффициенты $r(k)$, содержащиеся в табл. 6, представляют собой целые числа. Примем параметр $1/z_0^2$, входящий в формулу (264), равным простой дроби. Если теперь умножить все весовые коэффициенты на знаменатель этой дроби, возведенный в соответствующую степень, то получим новые значения коэффициентов в виде целых чисел.

Рассмотрим пример получения таким путем целочисленных весовых коэффициентов при $N=6$. С помощью формулы (264) и табл. 6 получаем $a(0)=1$; $a(1)=5 - 5/z_0^2$; $a(2)=10 - 15/z_0^2 + 5/z_0^4$. Примем

$1/z_0^2 = 1/5$; это соответствует $h_L = -56,7$ дБ. Умножим далее все весовые коэффициенты на 5. В итоге получим $a(0) = 5$, $a(1) = 20$, $a(2) = 36$.

Очевидно, что таким путем целесообразно находить целочисленные коэффициенты только при относительно небольших значениях общего числа импульсов ВФ N . Иначе весовые коэффициенты будут получаться весьма большими и выигрыша от их применения мы не получим.

В табл. 8 приведены некоторые варианты усредняющих окон с целочисленными коэффициентами, полученные данным методом.

30. ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ С МОДУЛЯЦИЕЙ-ДЕМОДУЛЯЦИЕЙ СИГНАЛА

Фильтрация сигнала широко используется в измерительных каналах с различными видами модуляции. Рассмотрим задачу фильтрации применительно

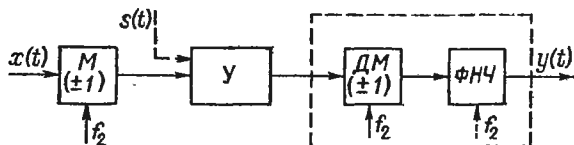


Рис. 44. Структурная схема измерительного канала с модуляцией-демодуляцией

к каналу с амплитудной модуляцией. Типичным примером измерительного устройства, использующего амплитудную модуляцию, является усилитель МДМ (усилитель с модуляцией-демодуляцией). Такие усилители предназначены для усиления медленно меняющихся сигналов низкого уровня. В них практически исключается погрешность, вызванная дрейфом и низкочастотными шумами усилителя модулированного сигнала.

Структурная схема усилителя МДМ показана на рис. 44. Она включает в себя модулятор M , усилитель U , демодулятор $ДМ$ и фильтр нижних частот $ФНЧ$. Модулятор и демодулятор представляют собой звенья, которые с тактом T_2 изменяют коэффициент передачи, так что этот коэффициент принимает, на-

пример, значения то $+1$, то -1 . Подобную структуру имеют также преобразователи для параметрических датчиков, работающие на переменном токе. В таких преобразователях роль модулятора выполняет измерительная цепь датчика (например, четырехплечий мост, питаемый переменным напряжением, выходное напряжение которого изменяется под воздействием измеряемой величины).

Фильтр нижних частот, устанавливаемый на выходе преобразователя (рис. 44), устраняет пульсации выходного напряжения, вызываемые помехой $s(t)$. Обычно в качестве ФНЧ в данной структуре используется непрерывный пассивный или активный фильтр. Однако в последние годы в измерительных каналах с модуляцией-демодуляцией сигнала начали применяться специальные весовые функции. При этом непрерывный БИХ-фильтр нижних частот традиционной структуры заменяется на дискретный или импульсный КИХ-фильтр, что позволяет повысить быстродействие измерительного канала, уменьшить нежелательное влияние определенных составляющих помехи.

Пусть характеристический полином (ХП) используемой в ФНЧ весовой функции имеет вид

$$P_c(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n. \quad (270)$$

Будем считать, что усилитель, входящий в структуру МДМ (рис. 44), имеет широкую полосу пропускания и при анализе динамических свойств может рассматриваться как безынерционное звено. Тогда для полезного сигнала $x(t)$ действие модулятора компенсируется действием демодулятора, так что изменение спектра полезного сигнала в конечном счете определяется только весовой функцией, описываемой полиномом (270).

Помеха в отличие от полезного сигнала не модулируется, но вместе с сигналом подвергается демодуляции. Соответственно этому характеристический полином ВФ, воздействующей на помеху, выглядит следующим образом:

$$P_n(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (-1)^n z^n. \quad (271)$$

Множитель $(-1)^n$ в (271) учитывает периодическое изменение коэффициента передачи демодулятора. АЧХ устройства, реализующего ту или иную ВФ, мы находим, определяя модуль ХП при подстановке в него $z = e^{j2\pi\bar{f}}$, где $\bar{f} = fT_2$. Поступая так же в данном случае, на основании (271) получаем АЧХ для помехи

$$|G_n(f)| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n (-e^{j2\pi\bar{f}})^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n [e^{j2\pi(\bar{f}+0,5)}]^n \right|. \quad (272)$$

Из (272) следует, что АЧХ для помехи канала МДМ отличается от АЧХ для полезного сигнала сдви-

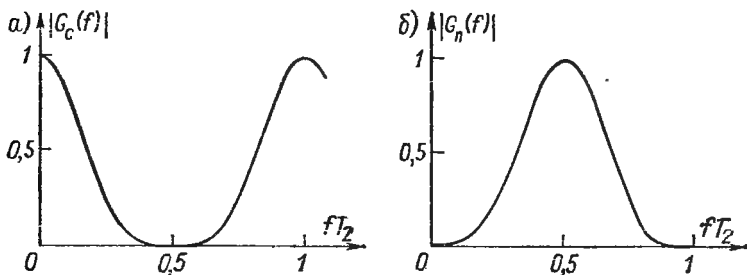


Рис. 45. АЧХ для полезного сигнала (а) и для помехи (б) канала МДМ

гом по частотной оси на $\bar{f} = 0,5$, т. е. на $f = f_2/2$, где $f_2 = 1/T_2$.

Это положение иллюстрирует рис. 45. Кривая $|G_c(f)|$ на этом рисунке показывает АЧХ для полезного сигнала, соответствующую некоторой ВФ. Кривая $|G_n(f)|$, полученная путем сдвига на $\bar{f} = 0,5$ кривой $|G_c(f)|$, показывает АЧХ для помехи.

В принципе для анализа достаточно одной амплитудно-частотной характеристики, например только $|G_n(f)|$. При этом нужно иметь в виду, что область полезного сигнала располагается на графике $|G_n(f)|$ в районе $f = 0,5$.

Практически демодуляцию и весовую обработку в измерительном устройстве производят одновременно. Это достигается за счет реализации ВФ, соответствующей характеристическому полиному (271). От исходной ВФ (270) данная ВФ отличается изменением знаков всех весовых коэффициентов с нечетными индексами.

Разнесение спектров сигнала и помехи за счет процессов модуляции и демодуляции придает весовой обработке новые, весьма ценные свойства. Если раньше нам не удавалось подавлять помехи, имеющие частоту, близкую к частоте полезного сигнала ($f \approx 0$), то теперь это стало возможным. Если раньше реализация коротких весовых функций была нецелесообразна из-за резкого подъема АЧХ в районе $\bar{f} = 0,5$, то теперь этот подъем означает увеличение коэффициента передачи для полезного сигнала. В результате оказывается возможным эффективно подавлять периодическую помеху за время, существенно меньшее ее периода.

Кривые АЧХ на рис. 45 относятся к дискретным ВФ. Если же реализуется ступенчатая ВФ, то тогда каждая из этих характеристик должна быть умножена на спектр одиночного импульса $(\sin \pi f T_2) / (\pi f T_2)$.

Рассмотренные положения относятся к случаю, когда модуляция сигнала датчика осуществляется за счет периодического переключения полярности питающего напряжения. Возможен другой вид модуляции, при которой осуществляется периодическое отключение напряжения питания датчика. Если при этом сохраняется принцип работы демодулятора (переключение знака коэффициента передачи) и вид реализуемой весовой функции, то тогда АЧХ для помехи $G_n(f)$ останется прежней. Что же касается АЧХ для полезного сигнала $|G_c(f)|$, то очевидно, что она изменится. ВФ для полезного сигнала теперь может быть получена из ВФ для помехи путем исключения всех нечетных импульсов последней. Такое удвоение интервала дискретизации практически не скажется на форме основного лепестка АЧХ $|G_c(f)|$, но уменьшит в два раза период повторения по частоте этой АЧХ и примерно во столько же раз уменьшит коэффициент передачи для полезного сигнала на частоте $f \approx 0$.

Простейшие весовые функции, применяемые в МДМ-структурах, — это биномиальные ВФ [33], характеристические полиномы для которых имеют вид

$$P_n(z) = (z - 1)^q, \quad (273)$$

где q — порядок ВФ. Вид таких ВФ при $q = 2$ и 3 показан на рис. 46, а и б.

Эти биномиальные ВФ отличаются от биномиальных ВФ, рассмотренных в § 24, отрицательным

знаком перед вторым членом бинома (эффект действия демодулятора). Приведенная АЧХ для помехи, соответствующая биномиальной ВФ (273), описывается формулой

$$|\bar{G}_n(f)| = |\sin(\pi f T_2)|^q. \quad (274)$$

Заметим, что при нормировании АЧХ следует учитывать тот факт, что для полезного сигнала ВФ описывается характеристическим полиномом $P_c(z) =$

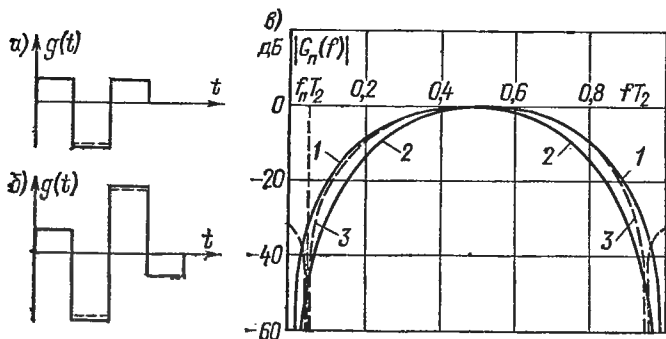


Рис. 46. Биномиальные ВФ второго (а) и третьего (б) порядков для каналов МДМ и соответствующие им АЧХ для помех (в)

$= (z + 1)^q$, и соответственно этому на нулевой частоте получим $|G_c(0)| = 2^q$. Графики, соответствующие формуле (274) при $q = 2$ и 3 , показаны на рис. 46, в (кривые 1 и 2). Как видим, с уменьшением частоты f АЧХ стремится к нулю. При заданной частоте помехи $f \ll 1/T_2$ подавление помехи увеличивается с уменьшением интервала дискретизации T_2 . Практически значение T_2 снизу ограничено быстрым действием функциональных узлов, входящих в структуру измерительного канала. Действительно, при смене полярности сигнала на выходе модулятора необходимо выждать некоторое время (до окончания переходного процесса в соединительных линиях и усилителе) и только после этого можно производить выборку сигнала.

Типовое значение интервала T_2 в многоканальной аппаратуре для работы с резистивными датчиками в настоящее время равно примерно 0,1 мс. При этом помехе, обусловленной сетевым напряжением 50 Гц, соответствует приведенная частота fT_2 , равная 0,005.

Коэффициент подавления помехи на этой частоте будет составлять $36,1q$ децибел.

Формула (274) соответствует дискретной ВФ. Если же реализуется ступенчатая ВФ, то тогда в правую часть этой формулы следует ввести множитель $(\sin \pi f T_n) / (\pi f T_n)$, где T_n — длительность одной ступени ВФ.

Для повышения коэффициента подавления сетевой помехи можно перейти от биномиальной ВФ к ВФ вида

$$P(z) = z^2 - 2z \cos(2\pi f_{\text{п}} T_2) + 1. \quad (275)$$

Изменение вида ВФ при переходе от ХП (273) при $q = 2$ к ХП (275) показано штриховой линией на рис. 46, а. Напомним, что подобная ВФ уже была нами рассмотрена в § 23. Но приведенная АЧХ здесь опишется соотношением, отличным от полученного ранее соотношения (186), что объясняется отличием полиномов $P_n(z)$ и $P_c(z)$. В данном случае

$$|\bar{G}_n(\bar{f})| = \frac{|\sin(\pi \bar{f} - \pi \bar{f}_{\text{п}}) \sin(\pi \bar{f} + \pi \bar{f}_{\text{п}})|}{\cos^2 \pi \bar{f}_{\text{п}}}, \quad (276)$$

где $\bar{f} = f T_2$, а $f_{\text{п}}$ — частота гармонической помехи. Этой зависимости соответствует кривая 3 на рис. 46, в. При отклонении частоты помехи от расчетного значения, т. е. при $f_{\text{п}} = f_{\text{п}}(1 + \epsilon)$, где $\epsilon \ll 1$, соотношение (276) приводится к виду

$$|\bar{G}_n(f_{\text{п}})| = 2|\epsilon| \pi f_{\text{п}} T_2 |\operatorname{tg}(\pi f_{\text{п}} T_2)|. \quad (277)$$

Если $f_{\text{п}} T_2 \ll 1$, то коэффициент ослабления помехи будет достаточно велик и тогда, когда частота помехи неточно равна расчетному значению.

Структура МДМ имеет то достоинство, что в ней могут быть устранены погрешности, вызванные напряжением смещения в усилителе и соединительных линиях. Действительно, для биномиальных ВФ (273) значение АЧХ на нулевой частоте равно нулю, $G_n(0) = 0$. Для ВФ (275) это положение не действует: при такой ВФ влияние постоянного напряжения смещения подавляется не полностью,

$$|\bar{G}_n(0)| = \operatorname{tg}^2(\pi f_{\text{п}} T_2). \quad (278)$$

Можно синтезировать ВФ, которая бы обеспечивала неограниченно большое подавление помехи на двух частотах: $f = 0$ и $f = f_{\text{п}}$. Для этого нужно

образовать ХП весовой функции перемножением двух сомножителей:

$$P(z) = (z - 1)[z^2 - 2z \cos(\pi \bar{f}_{п1}) + 1] = \\ = z^3 - [1 + 2 \cos(\pi \bar{f}_{п1})](z^2 - z) - 1. \quad (279)$$

Из (279) следует, что ВФ должна состоять из четырех равноотстоящих импульсов, причем при $\bar{f}_п \ll 1$ модули коэффициентов при z и z^2 должны быть почти в три раза больше модулей коэффициентов при z^0 и z^3 (штриховые линии на рис. 46, б).

Расширение частотной полосы, в которой осуществляется подавление помех, может быть достигнуто за счет введения в ХП новых множителей вида $z^2 - 2z \cos(\pi \bar{f}_п) + 1$. Можно здесь также использовать весовую функцию, эквивалентную ВФ Дольфа — Чебышева. Соответствующую ВФ легко получить из ВФ Дольфа — Чебышева путем изменения знаков весовых коэффициентов с нечетными номерами.

Как уже указывалось, наиболее удобны для реализации равноамплитудные весовые функции или, иначе говоря, весовые функции с единичными коэффициентами. В случае МДМ-канала весовые коэффициенты подобных функций могут принимать значения $+1$, -1 и 0 . Рассмотрим один из методов построения равноамплитудных ВФ для МДМ-канала [11].

Возьмем в качестве исходной простейшую биномиальную ВФ

$$P(z) = z - 1. \quad (280)$$

Умножим двучлен (280) на множитель $z^2 - 1$. Тогда получим

$$P_{п2}(z) = (z - 1)(z^2 - 1) = z^3 - z^2 - z + 1. \quad (281)$$

ВФ, соответствующая полиному (281), имеет единичные коэффициенты (рис. 47, а) и обеспечивает нуль АЧХ двойной кратности на частоте $f = 0$.

Умножим далее ХП (281) на двучлен $z^4 - 1$:

$$P_{п3}(z) = (z - 1)(z^2 - 1)(z^4 - 1) = \\ = z^7 - z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 + z - 1. \quad (282)$$

Как видим, здесь мы имеем равноамплитудную ВФ (рис. 47, б), обеспечивающую нуль АЧХ тройной кратности на частоте помехи $f = 0$.

Использованный нами здесь метод весьма прост: для увеличения кратности нуля АЧХ на нулевой частоте мы удваивали число импульсов ВФ, причем вторую половину ВФ мы образовывали путем инвертирования исходной ВФ.

Если допустить существование нулевых весовых коэффициентов, то тогда можно образовать ХП функ-

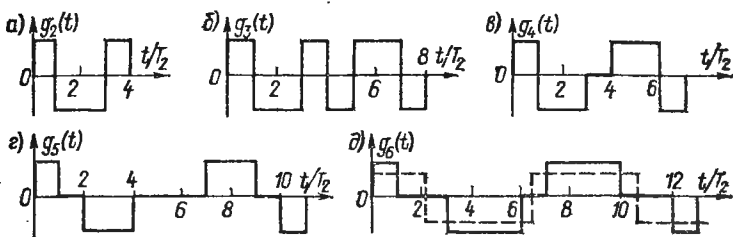


Рис. 47. Равноамплитудные ВФ для каналов МДМ

ции, обеспечивающей нуль тройной кратности при $f = 0$, следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{п4}(z) &= (z^3 - 1)(z^2 - 1)(z - 1) = \\ &= z^6 - z^5 - z^4 + z^2 + z - 1. \end{aligned} \quad (283)$$

Эта ВФ показана на рис. 47, в. На рис. 47, г и д показаны еще две равноамплитудные ВФ, характеристические полиномы которых описываются формулами

$$\begin{aligned} P_{п5}(z) &= (z^5 - 1)(z^3 - 1)(z^2 - 1) = \\ &= z^{10} - z^8 - z^7 + z^3 + z^2 - 1; \end{aligned} \quad (284)$$

$$\begin{aligned} P_{п6}(z) &= (z^5 - 1)(z^4 - 1)(z^3 - 1) = \\ &= z^{12} - z^9 - z^8 - z^7 + z^5 + z^4 + z^3 - 1. \end{aligned} \quad (285)$$

Номера кривых $g_i(t)$ на рис. 47, а — д — соответственно те же, что и у функций $P_{пi}(z)$ в формулах (281) — (285).

При реализации ВФ, соответствующих этим характеристическим полиномам, необходимо модулятор, входящий в структуру МДМ рис. 44, строить таким образом, чтобы знак его коэффициента передачи изменялся синхронно с изменением знака ВФ. Пример изменения коэффициента передачи модулятора показан штриховой линией на рис. 47, д.

31. ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ, УМЕНЬШАЮЩИЕ ПОГРЕШНОСТИ КВАНТОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ ЧАСТОТОМЕРОВ

Рассмотренные выше усредняющие окна позволяют уменьшить погрешность нахождения среднего значения некоторого сигнала по ограниченной во времени реализации этого сигнала. Как уже говорилось, усредняющие окна — это весовые функции КИХ-фильтров нижних частот со стремящейся к нулю шириной полосы пропускания.

Задачу, которую решает цифровой частотомер, тоже можно рассматривать как определение постоянной составляющей некоторого сигнала, содержащего

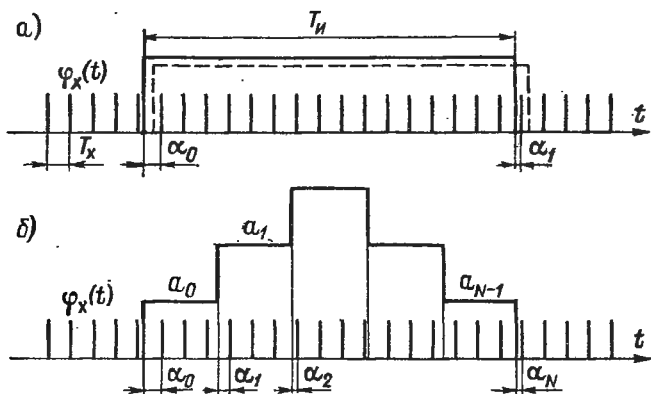


Рис. 48. К определению погрешности квантования цифрового частотомера с П-образной (а) и ступенчато-треугольной (б) весовой функцией

нежелательные пульсации. Счетчик, входящий в такой частотомер, подсчитывает число входных импульсов за время измерения $T_{\text{и}}$. Если частота входных импульсов, измеряемая частотомером, равна f_x , то в счетчике частотомера накопится число импульсов M , равное округленному до целого произведению $f_x T_{\text{и}}$. Процесс измерения частоты иллюстрирует рис. 48, а. Этот процесс можно рассматривать как определение постоянной составляющей (среднего значения) последовательности импульсов с помощью П-образной весовой функции или, что то же самое, с помощью усредняющего окна Дирихле.

Будем считать, что импульсы, поступающие на счетчик цифрового частотомера, имеют длительность, много меньшую периода, т. е. могут приближенно рассматриваться как δ -импульсы:

$$\varphi_x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_x), \quad (286)$$

где $T_x = 1/f_x$ — период δ -импульсов. Эти импульсы проходят на счетчик в течение времени, ограниченного моментами t_0 и $t_0 + T_n$. Тогда результат измерения может быть найден по формуле

$$y = \int_{t_0}^{t_0+T_n} \varphi_x(t) dt. \quad (287)$$

Представим последовательность δ -импульсов (286) в виде обратного преобразования Фурье. На основании формулы (71) находим

$$\varphi_x(t) = f_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_x t} = f_x + 2f_x \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k f_x t). \quad (288)$$

Подставляя (288) в (287), получаем после несложных преобразований

$$\begin{aligned} y &= \int_{t_0}^{t_0+T_n} f_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_x t} dt = \\ &= f_x T_n + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(\pi k f_x T_n) \cos\left[2\pi k f_x \left(t_0 + \frac{T_n}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (289)$$

Из полученного соотношения следует, что результат измерения содержит желаемую информацию $f_x T_n$ и погрешность, вызванную наличием во входном сигнале (288) гармоник с частотами $k f_x$. Эта погрешность цифрового частотомера известна как погрешность квантования. Действительно, в процессе счета импульсов может быть получено только целое число, так что произведение $f_x T_n$ округляется до ближайшего меньшего или большего целого числа. В примере, показанном на рис. 48, а, произведение $f_x T_n$ равно 16,7. Соответственно этому на счетчик будет проходить или 16 импульсов (при этом погрешность квантования

равна $-0,7$) или 17 импульсов (погрешность квантования равна $+0,3$). Этим двум случаям соответствуют сплошная и штриховая линии, показывающие П-образную ВФ на рис. 48, а. Погрешность квантования обусловлена наличием временных отрезков α_0 и α_1 на рис. 48, а между фронтом П-образной ВФ и ближайшим следующим импульсом последовательности $\varphi_x(t)$ и между спадом ВФ и ближайшим следующим импульсом. Рассмотрим, как погрешность квантования связана со значениями α_0 и α_1 . Процесс измерения частоты можно в данном случае представить как процесс определения числа периодов T_x , укладываемых на отрезке времени T_n . Показание счетчика M — это уместившееся в T_n число импульсов, разграничивающих периоды T_x . Оно на единицу больше числа целых периодов T_x , уместившихся на отрезке времени T_n . Очевидно, что этот отрезок времени

$$T_n = T_x(M - 1) + \alpha_0 + (T_x - \alpha_1). \quad (290)$$

Поскольку в расчет берется только значение $T_x M$, то абсолютная погрешность квантования будет

$$\delta = \alpha_0 - \alpha_1. \quad (291)$$

В общем случае α_0 и α_1 представляют собой независимые случайные величины, распределенные по равномерному закону с математическим ожиданием, равным $T_x/2$, и дисперсией, равной $T_x^2/12$. Соответственно математическое ожидание погрешности квантования $\bar{\delta} = \bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_1$ равно нулю, а дисперсия $\bar{\delta}^2 = \bar{\alpha}_0^2 + \bar{\alpha}_1^2$ равна $T_x^2/6$. Относительную среднеквадратическую погрешность квантования цифрового частотомера с П-образной весовой функцией можно найти по формуле

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{\bar{\delta}}{MT_x} = \frac{1}{\sqrt{6} f_x T_n}. \quad (292)$$

Усредняющее окно Дирихле (или, что то же самое, П-образная ВФ) — далеко не лучшее окно, как следует из материала § 27. В данном случае мы имеем дело с сигналом, содержащим в соответствии с формулой (272) определенный набор высших гармоник. И тот критерий, который мы использовали в § 27 для оценки окон (наибольшая амплитуда бокового лепестка АЧХ), нельзя применять тогда, когда окно

предназначается для уменьшения среднеквадратической погрешности квантования цифрового частотомера. Окна, которые целесообразно применять для снижения погрешности квантования, рассмотрены в [30].

Весовые коэффициенты оптимального ступенчатого окна, уменьшающего относительную среднеквад-

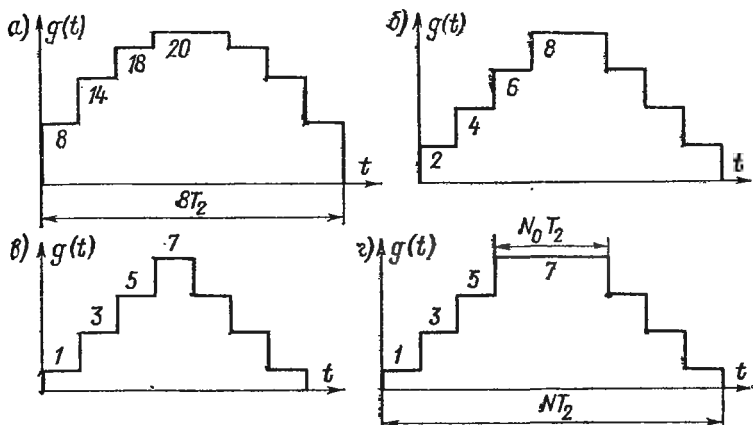


Рис. 49. Весовые функции, уменьшающие погрешность квантования цифрового частотомера: оптимальная (а), треугольные с четным (б) и нечетным (в) числом ступеней, трапецидальная (г)

ратическую погрешность квантования, определяются соотношением [30]

$$a_n = (n + 1)(N - n). \quad (293)$$

В частности, при $N = 8$ получим $a_0 = a_7 = 8$; $a_1 = a_6 = 14$; $a_2 = a_5 = 18$; $a_3 = a_4 = 20$ (рис. 49, а).

Абсолютная погрешность квантования в случае применения ступенчатой ВФ может быть найдена по формуле (см. рис. 48, б)

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ВФ}} &= (a_0 - a_1)a_0 + (a_1 - a_2)a_1 + \dots \\ &\dots + (a_{N-1} - a_N)a_{N-1} = a_0a_0 + a_1(a_1 - a_0) + \dots \\ &\dots + a_{N-1}(a_{N-1} - a_{N-2}) - a_Na_{N-1}. \end{aligned} \quad (294)$$

Среднеквадратическая погрешность будет

$$\tilde{\delta}_{\text{ВФ}} = \frac{T_x}{\sqrt{12}} \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n-1})^2 + a_{N-1}^2}. \quad (295)$$

Число импульсов, пришедших на счетчик частотомера, найдем по соотношению

$$M_{ВФ} = \frac{f_x T_n}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n. \quad (296)$$

Таким образом, относительная среднеквадратическая погрешность квантования будет равна

$$\tilde{\gamma}_{ВФ} = \frac{\tilde{\delta}_{ВФ}}{M_{ВФ} T_n} = \frac{N \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n-1})^2 + a_{N-1}^2}}{\sqrt{12} f_x T_n \sum_{n=0}^{N-1} a_n}. \quad (297)$$

Показательным является отношение погрешности $\tilde{\gamma}_{ВФ}$ к погрешности $\tilde{\gamma}_{\Pi}$, получаемой в случае применения простейшей Π -образной ВФ:

$$V_{ВФ} = \frac{\tilde{\gamma}_{ВФ}}{\tilde{\gamma}_{\Pi}} = \frac{N \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n-1})^2 + a_{N-1}^2}}{\sqrt{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \right|}. \quad (298)$$

Для оптимальной ВФ, описываемой формулой (293), можно получить следующие формулы:

$$\tilde{\gamma}_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{N}{(N+1)(N+2)}} \frac{1}{f_x T_n}. \quad (299)$$

$$V_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{6N}{(N+1)(N+2)}}. \quad (300)$$

Как видим, оптимальная ВФ обеспечивает уменьшение относительной среднеквадратической погрешности квантования, причем это уменьшение усиливается с ростом числа участков N весовой функции.

Близкой к оптимальной по своим свойствам является ступенчато-треугольная весовая функция (рис. 49, б и в), для которой при четном N

$$a_n = N + 1 - |N - 1 - 2n|, \quad (301)$$

а при нечетном

$$a_n = N - |N - 1 - 2n|. \quad (302)$$

При применении этих весовых функций в цифровом частотомере отношение среднеквадратической по-

погрешности квантования к среднеквадратической погрешности частотомера, реализующего П-образную ВФ, будет равно (соответственно при нечетном и четном числе ступеней N)

$$V_{\Delta n} = \sqrt{\frac{8N^2}{(N+1)^3}}; \quad (303)$$

$$V_{\Delta ч} = \frac{2\sqrt{2N-3}}{N}. \quad (304)$$

Несколько лучшие результаты, чем треугольная весовая функция, обеспечивает трапецеидальная весовая функция, представляющая собой треугольную ВФ, вычисленную по формулам (301) или (302), но со срезанной вершиной (рис. 49, з). Анализ показывает, что наилучший результат достигается тогда, когда отношение нижнего основания трапеции к верхнему равно примерно трем ($N/N_0 \approx 3$).

Согласно (300) при $N \gg 1$ и при переходе от П-образной к оптимальной ВФ среднеквадратическая относительная погрешность квантования снижается в $V_{\text{опт}}$ раз;

$$V_{\text{опт}} \approx \sqrt{6/N}. \quad (305)$$

Такое же отношение $V = \tilde{V}_{\text{ВФ}}/\tilde{V}_{\text{П}}$ для треугольных ВФ находим на основании (303) и (304):

$$V_{\Delta} \approx \sqrt{8/N}. \quad (306)$$

Для трапецеидальной ВФ при $N/N_0 \approx 3$ и $N \gg 1$ можно найти отношение V в виде

$$V_{\text{трап}} \approx \sqrt{6,75/N}. \quad (307)$$

Таким образом, во всех рассмотренных случаях погрешность квантования будет тем меньше, чем больше участков N содержит весовая функция. При этом треугольная и трапецеидальная весовые функции дают погрешность квантования, всего лишь в $\sqrt{8/6} \approx 1,15$ и в $\sqrt{6,75/6} \approx 1,06$ раза большие, чем оптимальная ВФ. Учитывая, что треугольная и трапецеидальная ВФ могут быть реализованы (аппаратно или программно) несколько проще, чем оптимальная ВФ, приходим к выводу, что эти ВФ целесообразно рекомендовать к широкому применению.

В рассмотренном нами методе цифрового измерения частоты время измерения $T_{\text{и}}$ случайным образом

расположено по отношению к импульсам, частота которых f_x измеряется (рис. 48). Однако иногда начало отрезка времени T_n синхронизируется с одним из указанных импульсов. В этом случае нет нужды воспроизводить весовую функцию целиком — достаточно воспроизвести лишь вторую половину треугольной, трапецеидальной или оптимальной весовой функции.

Мы рассмотрели в данном параграфе весовые функции, уменьшающие погрешность квантования, применительно к цифровому частотомеру. Эффект уменьшения погрешности квантования может быть достигнут также и при применении ВФ в цифровых периодомерах, фазометрах, а также в интегрирующих аналого-цифровых преобразователях с частотно-импульсным или время-импульсным промежуточным преобразованием.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ И РАСЧЕТА ДИСКРЕТНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ ФИЛЬТРОВ

32. РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Современные средства измерения, как правило, имеют в своем составе аналого-цифровой преобразователь и представляют выходную информацию в виде цифрового кода. Наличие цифровых эквивалентов входного сигнала дает возможность применить цифровую фильтрацию измерительной информации, и в частности использовать цифровые КИХ-фильтры. При прочих равных условиях фильтр целесообразно располагать ближе ко входу измерительного устройства, чтобы как можно раньше подавить помеху. Это объясняется тем, что до тех пор, пока помеха не подавлена, динамический диапазон измерительного канала должен быть рассчитан на передачу без искажения суммы наибольшего полезного сигнала и наи-

большей помехи. Такие повышенные требования к динамическому диапазону измерительных преобразователей обычно отрицательно сказываются на их точности.

Алгоритм, реализуемый дискретным или импульсным КИХ-фильтром, предполагает нахождение взвешенной суммы определенного конечного числа мгновенных или интегральных выборок фильтруемого сигнала. В общем случае схема аналогового КИХ-фильтра выглядит так, как показано на рис. 50, а. В состав

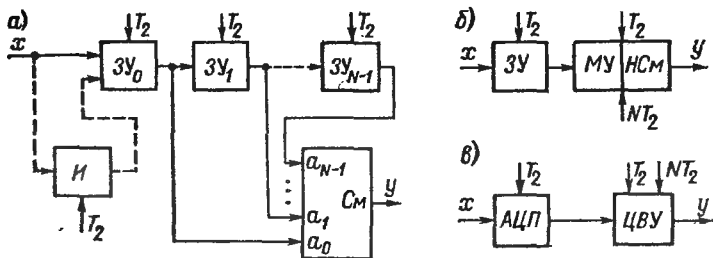


Рис. 50. Структурные схемы КИХ-фильтров

фильтра входит цепочка аналоговых запоминающих устройств $ЗУ_0—ЗУ_{N-1}$. Первое из этих устройств $ЗУ_0$ запоминает мгновенные значения входного сигнала с тактом T_2 и хранит их в продолжение одного такта. С задержкой на один такт информация из ячейки памяти $ЗУ_0$ переписывается в $ЗУ_1$, а в $ЗУ_0$ в это время запоминается новая выборка входного сигнала. Из $ЗУ_1$ сигнал с задержкой еще на один такт переписывается в $ЗУ_2$ и т. д. Согласование по времени операций переписи информации из ячейки и записи в нее новой информации достигается небольшим опережением импульса переписи по отношению к импульсу записи или многотактной синхронизацией с соответствующим усложнением запоминающих устройств.

Таким образом в ячейках $ЗУ_0—ЗУ_{N-1}$ хранится и периодически обновляется информация об N последовательных выборках входного сигнала, взятых с тактом T_2 . Сигналы с выходов этих ячеек суммируются с весами $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ в аналоговом сумматоре $СМ$. На выходе сумматора в каждом такте T_2 мы получаем информацию, обработанную в соответствии

с алгоритмсом дискретной фильтрации,

$$y(nT_2) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m x[(n-m)T_2], \quad (308)$$

где nT_2 — текущее значение квантованного времени.

Если требуется реализовать КИХ-фильтр не с дискретной, а со ступенчатой весовой функцией, то тогда вместо мгновенных используются интегральные выборки входного сигнала. Это достигается включением интегратора I на вход первой запоминающей ячейки (штриховая линия на рис. 50, а). Интегратор периодически, с тактом T_2 , сбрасывается на нуль. Непосредственно перед сбросом сигнал с интегратора переписывается в ячейку $ЗУ_0$. Выходной сигнал фильтра в этом случае можно найти по формуле (308), если подставить в нее вместо мгновенных значений $x[(n-m)T_2]$ интегралы

$$\frac{1}{\tau_I} \int_{(n-m-1)T_2}^{(n-m)T_2} x(t) dt, \quad \text{где } \tau_I — \text{постоянная времени интегратора } I.$$

Фильтр по схеме рис. 50, а достаточно сложен. Точность передачи полезного сигнала в этом фильтре зависит как от точности работы всех входящих в него аналоговых запоминающих устройств, так и от точности сумматора. Более компактный фильтр реализуется на основе накапливающего аналогового сумматора. В этом случае структура фильтра может быть выполнена так, как показано на рис. 50, б. Здесь сигнал с запоминающего устройства поступает на масштабирующее устройство $МУ$ и далее на накапливающий сумматор $НСм$. Начальная установка $МУ$ и $НСм$ производится с циклом NT_2 . При этом в масштабирующем устройстве устанавливается коэффициент передачи a_0 , а сумматор сбрасывается на нуль. Приходящий после этого выходной сигнал $ЗУ$ запоминается в сумматоре с коэффициентом a_0 . Далее в $МУ$ устанавливается масштабирующий коэффициент a_1 и в очередном такте T_2 сигнал с $ЗУ$ с весом a_1 добавляется к сигналу, запомненному ранее в $НСм$. Всего в накапливающий сумматор поступают N дискретных значений входного сигнала, умноженных на весовые коэффициенты. Полученная таким путем взвешенная сумма и есть выходной сигнал фильтра. Затем снова производится начальная установка узлов фильтра и

начинается формирование нового выходного сигнала. Таким образом на формирование одного значения выходного сигнала здесь затрачивается время NT_2 .

Цифровой КИХ-фильтр в общем случае состоит из аналого-цифрового преобразователя АЦП и цифрового вычислительного устройства ЦВУ (рис. 50, в). АЦП вырабатывает коды, пропорциональные мгновенным или интегральным квантованным значениям входного аналогового сигнала $x(t)$. Далее эти коды обрабатываются в ЦВУ, где воспроизводится алгоритм работы цифрового КИХ-фильтра — вычисление взвешенной суммы последовательных значений кода.

В состав ЦВУ может входить цепочка запоминающих устройств (запоминающих регистров), хранящих последовательные коды и сумматор этих кодов. Структура цифрового фильтра при этом совпадает со структурой рис. 50, а, рассмотренной нами применительно к аналоговому варианту КИХ-фильтра. В случае цифрового фильтра функциональное назначение всех узлов фильтра сохраняется, но оперируют они не с аналоговыми сигналами, а с кодами. Кроме того, на входе фильтра перед $ЗУ_0$ устанавливается АЦП. Выходной сигнал такого фильтра будет обновляться с тактом, равным интервалу дискретизации T_2 . Другой вариант ЦВУ может реализовать схему рис. 50, б. В этом случае используется накапливающий цифровой сумматор, в который поступает N последовательных значений кода, предварительно умноженных на весовые коэффициенты a_n . В таком фильтре выходной результат может обновляться не чаще, чем один раз за время NT_2 .

В аналоговом варианте фильтра по структуре рис. 50, б роль накапливающего сумматора может выполнять интегратор. Пример схемы подобного импульсного КИХ-фильтра представлен на рис. 51, а. Интегратор здесь построен на операционном усилителе $A2$, конденсаторе C и резисторе (на рисунке не показан); масштабирование входного сигнала интегратора производится в неинвертирующем усилителе, выполненном на операционном усилителе $A1$. Аналоговые ключи $S1—S3$ используются для изменения масштаба подаваемого на интегратор сигнала. С помощью $S4$ осуществляется начальный сброс интегратора. Сигнал на выходе данного фильтра, соответствующий фильтрованному сигналу $x(t)$, присутствует

только после реализации N ступеней весовой функции и до очередного сброса интегратора.

Непрерывный отсчет выходного сигнала обеспечивает импульсный КИХ-фильтр, показанный на рис. 51, б. Здесь ключи $S1 - S3$ на входе интегратора, переключаясь, изменяют постоянную времени интегратора и тем самым обеспечивают при интегрировании входного сигнала $U_x(t)$ реализацию различных

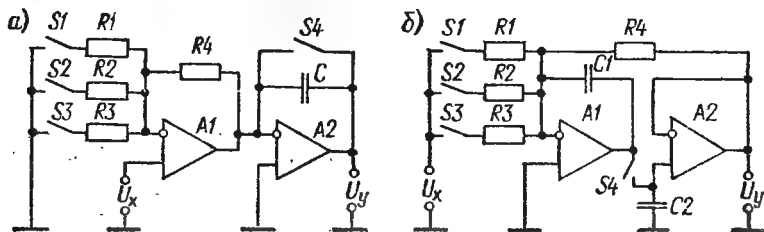


Рис. 51. Аналоговые КИХ-фильтры

ступеней весовой функции. Каждый раз после очередного воспроизведения всех N ступеней ВФ ключ $S4$ замыкается на короткое время и напряжение с интегратора переписывается в АЗУ, составленное из конденсатора $C2$ и повторителя напряжения $A2$. В этом фильтре не требуется производить начальную установку интегратора: она осуществляется автоматически за счет обратной связи через резистор $R4$. Благодаря этой же обратной связи исключается зависимость выходного напряжения фильтра в установившемся режиме от емкости $C1$. Для того чтобы устройство по схеме рис. 51, б работало как фильтр с конечной импульсной характеристикой, требуется выполнить условие $R_4 C_1 = N T_2$. Более подробную информацию о работе интегрирующего дискретизатора, положенного в основу фильтра, можно найти в [29, стр. 90—93].

В интегрирующих аналого-цифровых преобразователях входной сигнал обычно вначале преобразуется в частоту или длительность импульсов, а затем производится цифровое измерение этих параметров (частоты или длительности). Весовая функция в таких АЦП может воспроизводиться как на первом, так и на втором этапе преобразования.

На рис. 52, а показана схема аналоговой части простейшего АЦП двухтактного интегрирования с за-

данным тактом, воспроизводящего ступенчатую ВФ. После начальной установки интегратора на нуль (с помощью ключа $S5$) производится в течение заданного времени NT_2 интегрирование с переключаемым масштабом входного напряжения U_x . Затем интегрируется опорное напряжение U_0 противоположного в сравнении с U_x знака в течение времени T_x , необходимого для уменьшения модуля выходного напряжения интегратора до нуля (равенство нулю этого

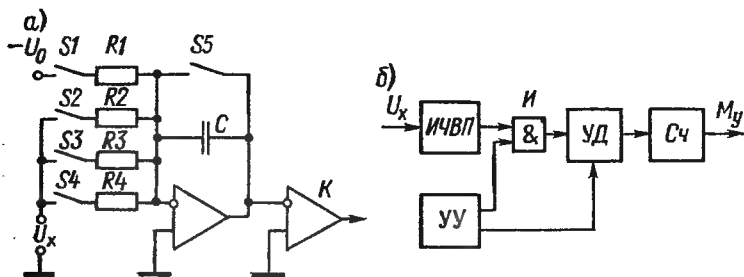


Рис. 52. Схемы для воспроизведения ступенчатых ВФ в интегрирующих АЦП

напряжения контролируется компаратором K). Переключение масштаба интегрирования напряжения U_x , осуществляемое с помощью ключей $S2—S4$, позволяет воспроизводить ступенчатую весовую функцию. Длительность второго такта интегрирования T_x в данном преобразователе пропорциональна постоянной составляющей входного напряжения U_x .

Точность реализации весовой функции так же, как и точность преобразования напряжения U_x , в рассмотренном устройстве не зависит от стабильности емкости C_1 , но зависит от стабильности отношений сопротивлений $R_1 \div R_4$. Для повышения точности преобразования целесообразно напряжение U_0 во втором такте интегрирования подавать не через резистор $R1$ (как это показано на рис. 52, а), а через параллельно включенные резисторы $R2—R4$. В этом случае исключается зависимость длительности этого такта (T_x) от сопротивлений резисторов $R2—R4$ при условии, что в первом такте при воспроизведении ВФ обеспечивается включение каждого из этих резисторов на одно и то же время (авторское свидетельство СССР № 879765). Этот же прием можно применить в

устройстве по схеме рис. 51, б, для чего нужно напряжение обратной связи с выхода повторителя напряжения подавать на вход интегратора не непрерывно через резистор $R4$, а в течение одного такта T_2 через параллельно включенные резисторы $R1—R3$.

Воспроизведение весовой функции на втором этапе интегрирующего аналого-цифрового преобразования (при кодировании частоты или длительности импульсов) можно выполнить так, как показано на рис. 52, б. В состав показанного здесь АЦП входит интегрирующий частотно-временной преобразователь *ИЧВП* (преобразователь напряжения U_x в частоту или длительность импульсов), ячейка *И*, устройство управления *УУ*, управляемый делитель частоты *УД*, счетчик импульсов *Сч*. Будем считать для определенности, что в *ИЧВП* входное напряжение преобразуется в длительность T_x импульсов, поступающих с выхода этого преобразователя на ячейку *И*. Далее эти импульсы в ячейке *И* заполняются тактовой частотой и полученные таким путем пачки импульсов подаются через *УД* на счетчик. Управляемый делитель пропускает на вход счетчика N штук таких пачек, причем для каждой из пачек устанавливается соответствующий коэффициент деления *УД*. Таким образом обеспечивается числоимпульсная реализация ступенчатой весовой функции. Если в *ИЧВП* производится преобразование U_x в частоту импульсов, то тогда эти импульсы направляются на вход счетчика через управляемый делитель также в течение N равных интервалов времени T_2 . И точно так же с помощью *УД* задаются весовые коэффициенты ступенчатой ВФ. Достоинством числоимпульсных методов воспроизведения ВФ является отсутствие проблем, связанных с точностью задания весовых коэффициентов. Однако не следует думать, что здесь коэффициенты задаются абсолютно точно. Поскольку число импульсов в пачке может быть только целым, то возникает погрешность квантования, которая и выступает как погрешность ВФ.

В заключение рассмотрим числоимпульсные методы реализации кусочно-полиномиальных ВФ. Если входной сигнал U_x с переключаемым масштабом подавать на вход интегратора, то на выходе интегратора мы получим сигнал U_y , соответствующий свертке сигнала U_x и ступенчатой (кусочно-постоянной) ве-

совой функции. Если же к выходу первого интегратора подключить второй, то на выходе второго интегратора сигнал будет равен свертке входного сигнала U_x и кусочно-линейной весовой функции. Последовательное включение трех интеграторов дает возможность воспроизводить кусочно-параболические весовые функции. Построенные таким образом КИХ-фильтры рассмотрены в [3, 22]. Однако они не получили широкого распространения из-за сложности

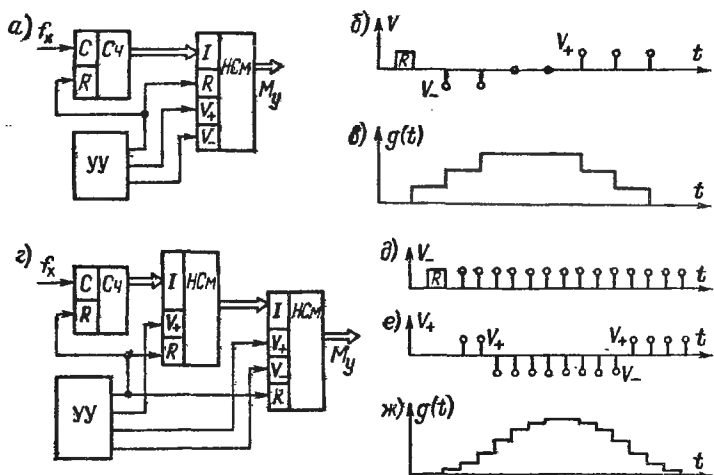


Рис. 53. Структуры КИХ-фильтров (а и г), реализующих ступенчато-полиномиальные ВФ (в и ж), и диаграммы, поясняющие их работу (б, д, е)

обеспечения приемлемой точности преобразования полезного сигнала. Если же переходить от аналоговых интеграторов к числоимпульсным, то проблема стабильности масштаба интегрирования снимается и подобные фильтры оказываются удобными для реализации [31].

На рис. 53, а показан вариант построения цифрового частотомера, реализующего числоимпульсным методом ступенчато-трапецидальную весовую функцию. В состав частотомера входит устройство управления $УУ$, счетчик C_4 и накапливающий сумматор $НСМ$. Перед началом измерения устройство управления производит начальную установку на нуль счетчика и сумматора (по входам R). Затем счетчик C_4 производит непрерывный счет импульсов измеряемой

частоты f_x , а сумматор $НСм$ периодически увеличивает или уменьшает свое содержимое на число, записанное в этот момент в счетчике $Сч$. Если устройства управления приходит сигнал на вход V_+ сумматора, то к числу, хранящемуся в сумматоре, добавляется число из счетчика; если же приходит сигнал на вход V_- , то из числа, накопленного в сумматоре, вычитается число, содержащееся в этот момент в счетчике.

На рис. 53, б и в приведены диаграммы, поясняющие работу рассматриваемого устройства для случая, когда воспроизводимая ВФ содержит семь ступеней. Пусть M_n — это число импульсов, приходящих на вход счетчика за время T_2 , равное длительности одной n -й ступени. Тогда после окончания первого интервала T_2 в сумматор перепишется число $-M_0$, после второго интервала перепишется $-M_0 - M_1$. Таким образом, после второго интервала в сумматоре окажется число $-2M_0 - M_1$. Как видно из рис. 53, б, на управление сумматором приходят вначале два импульса V_- , затем два такта на сумматор управляющие импульсы не поступают и затем приходят три импульса V_+ . В результате после семи тактов T_2 в сумматоре будет накоплено число

$$M = M_1 + 2M_2 + 3(M_3 + M_4 + M_5) + 2M_6 + M_7.$$

Таким путем можно воспроизводить симметричные ступенчато-трапецеидальные весовые функции с различной длительностью нижнего и верхнего основания. В частности, в [17] была предложена такая структура для построения цифрового частотомера, в котором для уменьшения погрешности квантования реализуется ступенчато-треугольная весовая функция.

Последовательное включение двух накапливающих сумматоров позволяет воспроизводить кусочно-параболические ВФ. На рис. 53, г, д, е, ж показано, как таким путем можно построить цифровой частотомер [31], реализующий ступенчато-параболическую весовую функцию.

33. РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ

Дискретные и импульсные фильтры с бесконечной импульсной характеристикой строятся на основе сум-

маторов, охваченных обратными связями. Простейший дискретный БИХ-фильтр показан на рис. 54, а. Он состоит из сумматора C_M и запоминающего устройства $ЗУ$. В сумматоре суммируется с весом a_0

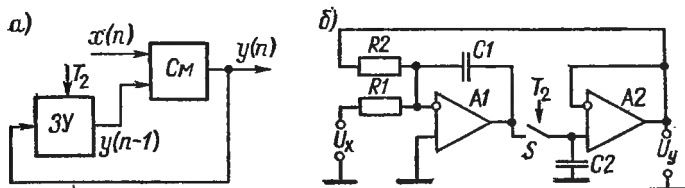


Рис. 54. Простейшие БИХ-фильтры: дискретный (а), импульсный (б)

дискретизированный входной сигнал $x(n)$ и с весом $-b_1$ задержанный в $ЗУ$ на один такт T_2 выходной сигнал сумматора $y(n-1)$. В результате на выходе фильтра получим

$$y(n) = a_0 x(n) - b_1 y(n-1).$$

Переходя к Z -преобразованию и учитывая, что задержка во временной области сигнала на один такт означает в области Z -преобразования умножение на z^{-1} , получаем

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}}. \quad (309)$$

Передаточные функции БИХ-фильтров характеризуются наличием в знаменателе полинома аргумента z в минус первой, как в (309), или в более высокой отрицательной степени.

Убедимся в том, что фильтр по схеме рис. 54, а действительно имеет бесконечную импульсную характеристику, т. е. бесконечную по времени реакцию на единичный импульс на входе. Предположим, что $a_0 = 1$, $b_1 = -0,5$. Пусть единичный импульс приходит на вход фильтра в нулевом такте, т. е. $x(0) = 1$, $x(1) = x(2) = \dots = 0$. Тогда на выходе в нулевом такте получим $y(0) = 1$. В первом такте входной сигнал фильтра равен нулю, но на вход сумматора приходит запомненный в $ЗУ$ (рис. 54, а) выходной сигнал сумматора $y(0) = 1$. Этот сигнал умножается на входе сумматора на коэффициент $-b_1$, т. е. на 0,5, так что на выходе фильтра получим $y(1) = 0,5$. Рассуждая далее подобным образом, находим $y(2) =$

$=0,25$; $y(3)=0,125, \dots$ Таким образом, с каждым тактом выходной сигнал фильтра уменьшается вдвое, асимптотически приближаясь к нулю, но теоретически процесс изменения этого сигнала мы можем наблюдать бесконечно долго.

Еще один пример БИХ-фильтра показан на рис. 54, б. В данном случае это аналоговый импульсный фильтр. Он состоит из интегратора ($A1, R1, C1$), выполняющего роль накапливающего сумматора, и аналогового запоминающего устройства ($C2, A2$). Подобное устройство мы уже рассмотрели выше (см. рис. 51, б). Как и раньше, в данном случае ключ S замыкается на короткое время с периодом T_2 с тем, чтобы периодически обновлять информацию, хранящуюся в запоминающем устройстве. Учитывая обратную связь с выхода фильтра на вход интегратора, можем записать

$$U_y(n) = U_y(n-1) + \frac{x(n)}{R_1 C_1} - U_y(n-1) \frac{T_2}{R_2 C_1}, \quad (310)$$

где $x(n)$ — интеграл от входного напряжения U_x в течение n -го такта T_2 ; $U_y(n)$ — напряжение на выходе интегратора и соответственно на выходе фильтра в конце n -го такта. Передаточная функция фильтра здесь также описывается формулой (309) при условии, что $a_0 = 1/\tau_1$ и $b_1 = -1 + T_2/\tau_2$, где $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_1$. То, что в данном случае $b_1 = -1 + T_2/\tau_2$, а не просто T_2/τ_2 , является следствием применения в фильтре интегратора, выполняющего роль накапливающего сумматора. Это дает нам возможность устанавливать, в частности, $b_1 = 0$, если принять $\tau_2 = T_2$. При этом рассматриваемое устройство перестает быть БИХ-фильтром: именно этот вариант мы использовали в КИХ-фильтре по схеме рис. 51, б. В общем же случае $b_1 \neq 0$. Если, например, установить $T_2/\tau_2 = 0,5$, то тогда получим $b_1 = -0,5$ и по динамическим свойствам данный фильтр будет подобен рассмотренному выше (рис. 54, а). Однако напомним, что для фильтра рис. 54, б $x(n)$ — это интегральные выборки входного сигнала, в то время как, рассматривая фильтр на рис. 54, а, мы предполагали, что значения $x(n)$ пропорциональны мгновенным выборкам. Этим определяется различие фильтров: на рис. 54, а — дискретный, на рис. 54, б — импульсный.

В общем случае передаточная функция дискретного БИХ-фильтра имеет вид

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i z^{-i}}. \quad (311)$$

Структурная схема такого фильтра может выглядеть так, как показано на рис. 55, а. Здесь звенья задержки (запоминающие устройства) обозначены прямоугольниками с символом z^{-1} внутри. Верхняя и

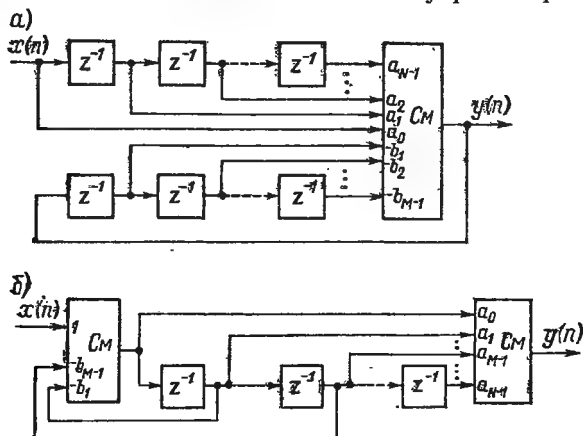


Рис. 55. Общие структуры БИХ-фильтров

нижняя цепочки этих звеньев обеспечивают задержки, необходимые для реализации полиномов от z^{-1} соответственно в числителе и в знаменателе формулы передаточной функции (311).

Как видим, общий случай БИХ-фильтра предполагает взвешенное суммирование задержанных входных сигналов, как это было и в КИХ-фильтре, а кроме того, взвешенное суммирование задержанных выходных сигналов.

Используя два сумматора, можно построить фильтр, содержащий только одну цепочку звеньев задержки — рис. 55, б [24]. В качестве звеньев задержки и сумматоров в структурах рис. 55 могут быть использованы различные аналоговые и цифровые узлы, частично рассмотренные в § 32 применительно к КИХ-фильтрам.

Поскольку для БИХ-фильтра характерно наличие обратной связи, то в принципе в нем возможны потеря устойчивости. В этом отношении КИХ-фильтр имеет преимущество: он всегда устойчив. Но зато для качественного КИХ-фильтра обычно требуется большое число звеньев задержки, в то время как БИХ-фильтр обычно содержит относительно небольшое число этих звеньев.

34. РАСЧЕТ ДИСКРЕТНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Для расчета КИХ-фильтров применяют два основных метода: метод взвешивания и метод частотных выборок [24].

Метод взвешивания предполагает использование рассмотренных в § 27 усредняющих КИХ-фильтров (усредняющих окон) для перехода от бесконечных к конечным импульсным характеристикам. В соответствии с этим методом весовую функцию фильтра определяют следующим образом. Вначале находят БИХ-фильтр, имеющий нужную частотную характеристику. Затем импульсную характеристику этого БИХ-фильтра $g_{\text{БИХ}}(t)$ умножают на усредняющее окно $g_o(t)$ и находят импульсную характеристику проектируемого КИХ-фильтра $g_{\text{КИХ}}(t)$:

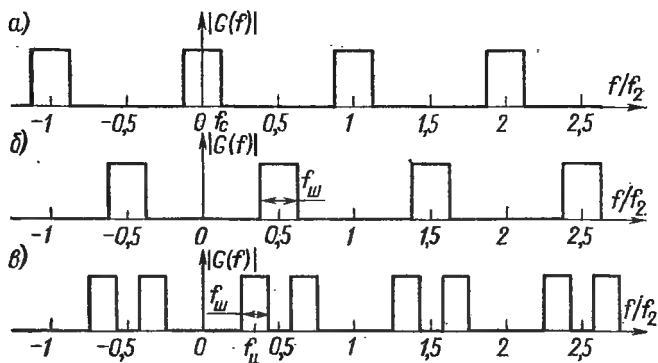
$$g_{\text{КИХ}}(t) = g_{\text{БИХ}}(t) g_o(t). \quad (312)$$

Умножению импульсных характеристик соответствует свертка частотных характеристик (ЧХ). Если мы хотим, чтобы характеристика, получаемая в результате свертки характеристик БИХ-фильтра и окна, как можно меньше отличалась от ЧХ БИХ-фильтра, то необходимо, чтобы ЧХ окна была по форме близка к δ -импульсу $\delta(f)$. Именно такие требования и предъявлялись к ЧХ усредняющих окон: мы считали, что окно тем лучше, чем уже основной лепесток ЧХ в районе нулевой частоты и чем меньше амплитуда боковых лепестков.

В качестве исходных БИХ-фильтров, обладающих требуемыми частотными характеристиками, можно использовать идеальные фильтры. Амплитудно-частотные характеристики идеальных дискретных фильтров показаны на рис. 56 [20]. Вид приведенных на этом

рисунке кривых определяется следующими обстоятельствами. Во-первых, у идеального фильтра равна нулю ширина переходной зоны между полосой пропускания и полосой заграждения, поэтому все АЧХ на рис. 56 имеют вид прямоугольных импульсов в частотной области.

Во-вторых, у фильтров, имеющих вещественную импульсную характеристику, АЧХ обладает четной



располагается от $f_2/2 - f_{\text{ш}}/2$ до $f_2/2 + f_{\text{ш}}/2$ (рис. 56, б), имеет вид

$$g_{\text{БИХ}}(n) = \frac{\sin(\pi f_{\text{ш}} t_n)}{\pi f_{\text{ш}} t_n} \cos(\pi f_2 t_n). \quad (314)$$

Наконец, для полосно-пропускающего фильтра (ППФ), у которого центральная частота полосы пропускания равна $f_{\text{ц}}$, а ширина этой полосы равна $f_{\text{ш}}$

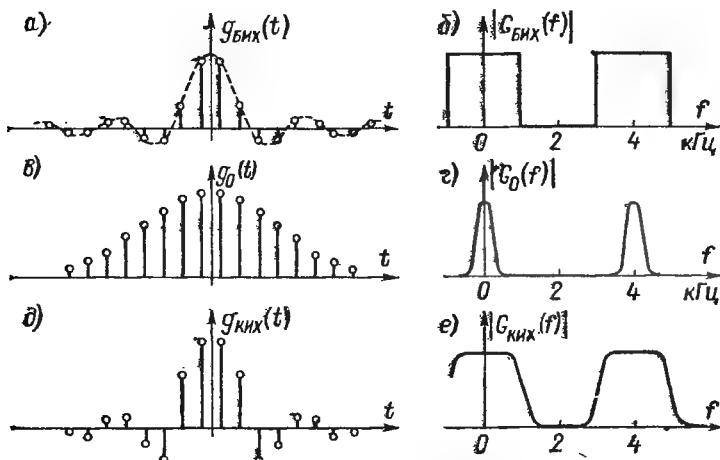


Рис. 57. Весовые функции идеального БИХ-фильтра нижних частот (а), усредняющего окна (в), синтезированного КИХ-фильтра (д) и соответствующие им АЧХ (б, г, е)

(рис. 56, в), импульсная характеристика описывается формулой

$$g_{\text{БИХ}}(n) = \frac{\sin(\pi f_{\text{ш}} t_n)}{\pi f_{\text{ш}} t_n} \cos(2\pi f_{\text{ц}} t_n). \quad (315)$$

Для того чтобы лучше понять суть метода взвешивания, рассмотрим два примера проектирования дискретных КИХ-фильтров: фильтра нижних частот и фильтра верхних частот.

Пусть проектируемый ФНЧ имеет частоту среза $f_c = 1$ кГц. Выберем частоту дискретизации f_2 равной 4 кГц. Импульсная характеристика идеального БИХ-фильтра для данного случая показана на рис. 57, а, а его ЧХ — на рис. 57, б. Для взвешивания импульсной характеристики используем окно Дольфа — Чебышева с числом импульсов N , равным 16 (рис. 57, в), и с уровнем боковых лепестков, равным —40 дБ. Для

расчета этого окна воспользуемся данными табл. 6, табл. 7 и формулой (264). В результате получим следующие весовые коэффициенты окна: $g_0(0), \dots, g_0(7) = 1; 1,73; 2,92; 4,33; 5,82; 7,18; 8,23; 8,79$. Частотная характеристика, соответствующая этому окну, показана на рис. 57, *г*.

Далее нам нужно перемножить импульсные характеристики рис. 57, *а* и *б*; это будет соответствовать свертке ЧХ рис. 57, *б* и *г*. При операции свертки одна из частотных характеристик сдвигается по частоте относительно другой, затем они перемножаются и определяется интеграл этого произведения. Если принять во внимание эти действия, то тогда станет понятно, что ширина основного лепестка ЧХ окна определяет ширину переходной зоны между полосами пропускания и заграждения проектируемого фильтра, а уровень боковых лепестков ЧХ окна определяет пульсации ЧХ этого фильтра в полосе пропускания и в полосе заграждения.

В нашем случае импульсная характеристика исходного идеального БИХ-фильтра определяется по формуле (313) при подстановке в нее

$$t_n = \left(-\frac{N-1}{2} + n \right) T_2, \quad (316)$$

где n — номер импульса (n изменяется от 0 до $N-1$).

Произведя операцию взвешивания с помощью окна, получим $g_{\text{КИХ}}(n) = g_{\text{БИХ}}(n) g_0(n)$. В нашем случае $g_{\text{КИХ}}(0), \dots, g_{\text{КИХ}}(7) = -0,07; -0,13; 0,27; 0,49; -0,85; -1,46; 2,79; 8,96$. Полученная ВФ показана на рис. 57, *д*. АЧХ спроектированного фильтра может быть найдена по формуле (251). Эта АЧХ в данном случае имеет вид такой, как показано на рис. 57, *е*. В промежутке от $f=0$ до $f=0,7$ кГц отклонение АЧХ от единичного значения не превышает 0,24 дБ, а в промежутке $f=1,4 \div 2,6$ кГц АЧХ не превосходит значения -50 дБ. Если требуется, чтобы АЧХ фильтра была более близка к оптимальной, этого можно достигнуть, увеличивая число импульсов ВФ N (в рассмотренном примере $N=16$).

Спроектируем теперь ФВЧ с полосой пропускания выше частоты $f=1,5$ кГц. Выберем, как и раньше, частоту дискретизации f_2 , равную 4 кГц. АЧХ идеального БИХ-фильтра для данного примера показана

штриховой линией на рис. 58, а. Будем теперь использовать для взвешивания окно Хэмминга (237).

При конструировании дискретного КИХ-фильтра верхних частот необходимо выбирать нечетное число импульсов ВФ N . Это объясняется тем обстоятельством, что при четном N значение АЧХ при $f = f_2/2$ всегда равно нулю: это следует из формулы (251).

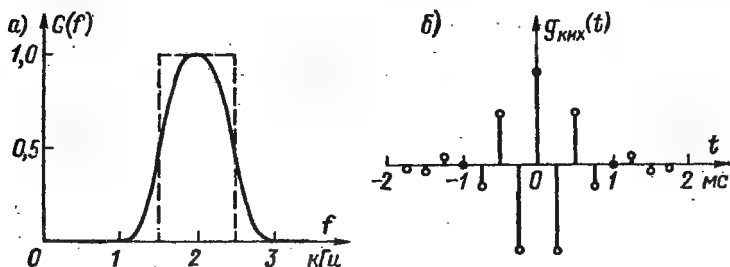


Рис. 58. Частотная характеристика (а) и весовая функция (б) КИХ-фильтра верхних частот

А в случае фильтра верхних частот при $f = f_2/2$ мы должны получить значение приведенной АЧХ, равное единице (рис. 58, а). Используя формулы (237), (312), (314) и (316), для проектируемого фильтра получаем

$$g_{\text{БИХ}}(n) = \left[\sin \frac{\pi f_{\text{ш}} T_2 (N-1-2n)}{2} \right] \frac{2}{\pi f_{\text{ш}} T_2 (N-1-2n)} \times \\ \times \cos \frac{\pi (N-1-2n)}{2};$$

$$g_o(n) = 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi (N-1-2n)}{N}; \quad (317)$$

$$g_{\text{КИХ}}(n) = g_{\text{БИХ}}(n) g_o(n).$$

Выберем $N = 15$. Учитывая, что в нашем примере $f_{\text{ш}} = 1$ кГц, $f_2 = 4$ кГц, получаем в итоге $g_{\text{КИХ}}(0), \dots, g_{\text{КИХ}}(7) = 0,012; -0,036; 0,056; 0; -0,205; 0,54; -0,865; 1$. Эта весовая функция показана на рис. 58, б, а соответствующая ей АЧХ представлена сплошной кривой на рис. 58, а. Эта АЧХ найдена по формуле (252).

Метод частотных выборок предполагает использование обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для определения весовых коэффициентов

КИХ-фильтра. ДПФ, как известно, позволяет найти равноотстоящие отсчеты спектра ограниченного по времени дискретизированного сигнала (см. § 13). Обратное ДПФ в свою очередь позволяет найти отсчеты сигнала, которые соответствуют заданным отсчетам спектра. Таким образом, мы можем взять желаемую частотную характеристику проектируемого КИХ-фильтра, найти равноотстоящие выборки этой характеристики и затем по ним найти отсчеты импульсной характеристики (весовые коэффициенты) фильтра. Так можно спроектировать фильтр, ЧХ которого гарантированно пройдет через заданные равноотстоящие точки. Однако между этими точками совпадение желаемой и реальной частотных характеристик не гарантируется.

Найдем соотношение, описывающее ход частотной характеристики дискретного фильтра в промежутках между известными равноотстоящими точками. Пусть весовые коэффициенты (отсчеты импульсной характеристики) КИХ-фильтра равны $g(n)$, где $n = 0 \div N - 1$, и отсчеты эти располагаются по времени симметрично относительно $t = 0$; при этом моменты отсчетов описываются формулой (316)

$$t_n = \left(-\frac{N-1}{2} + n \right) T_2.$$

Частотная характеристика фильтра $G(f)$ — это преобразование Фурье его импульсной характеристики. В данном случае

$$G(f) = T_2 \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j2\pi f t_n}. \quad (318)$$

Используя формулу обратного дискретного преобразования Фурье (92), находим

$$g(n) = f_1 \sum_{k=0}^{N-1} G(kf_1) e^{j \frac{2\pi}{N} k(n+\alpha)}. \quad (319)$$

В нашем случае коэффициент α , показывающий положение начального импульса последовательности $g(n)$, определяется соотношением $\alpha = -(N-1)/2$. Частота f_1 , входящая в (319), — это величина, обратная длительности импульсной характеристики $f_1 = 1/T_1$. Учитывая эти соотношения и формулу (317),

подставляем (319) в (318). В результате получаем

$$G(f) = \frac{T_2}{T_1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} G(kf_1) e^{j \frac{\pi k}{N} (2n-N+1)} \right] e^{-j\pi f T_2 (2n-N+1)}. \quad (320)$$

Меняя порядок суммирования и вводя обозначение $G(kf_1) = G_d(k)$, преобразуем это соотношение:

$$G(f) = \frac{T_2}{T_1} \sum_{k=0}^{N-1} G_d(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\pi (2n-N+1) \left(\frac{k}{N} - f T_2 \right)}. \quad (321)$$

Внутреннюю сумму в (321) можно определить как сумму геометрической прогрессии по формуле (38). В результате после несложных преобразований получим окончательно

$$G(f) = \frac{T_2}{T_1} \sum_{k=0}^{N-1} G_d(k) \frac{\sin(N\pi f T_2 - \pi k)}{\sin(\pi f T_2 - \pi k/N)}. \quad (322)$$

Соотношение (322) дает возможность определить ход ЧХ КИХ-фильтра в промежутках между равноотстоящими выборками $G(kf_1)$.

Покажем на примерах, как производится проектирование дискретных КИХ-фильтров методом частотных выборок.

Спроектируем фильтр нижних частот, такой же, как был в примере при рассмотрении метода взвешивания (см. рис. 57). Желаемая идеальная АЧХ проектируемого фильтра показана штриховой линией на рис. 59, а. Пусть проектируемый КИХ-фильтр будет иметь импульсную характеристику, состоящую из 16 импульсов ($N = 16$). На идеальной ЧХ, показанной на рис. 59, а, берем выборки, соответствующие частотам $f_k = kf_2/16$, где f_2 — частота дискретизации. В нашем случае $f_2 = 4$ кГц и выборки ЧХ будут иметь значения $G_d(0) \div G_d(7) = 1; 1; 1; 1; 0,5; 0; 0; 0$. Так как ЧХ обладает симметрией относительно $f = f_2/2$, то достаточно взять только $N/2 = 8$ выборок. Следует обратить внимание на то, что выборка, соответствующая частоте $f = 1$ кГц ($k = 4$), попадает на вертикальный спад АЧХ и поэтому мы берем значение $G_d(4)$ равным 0,5, т. е. полусумме значений ЧХ при подходе слева и справа к данной частоте.

Далее нужно воспользоваться формулой обратного ДПФ для того, чтобы по частотным выборкам

$G(k)$ найти отсчеты импульсной характеристики $g(n)$. Здесь подходит любая из двух формул (105) или (109). Эти формулы были выведены в § 14 применительно к ДПФ симметричных сигналов. Импульсные же характеристики проектируемых КИХ-фильтров как раз и представляют собой четно-симметричные функции времени. Отметим, что если бы мы решили проектировать КИХ-фильтр нижних частот с нечетным

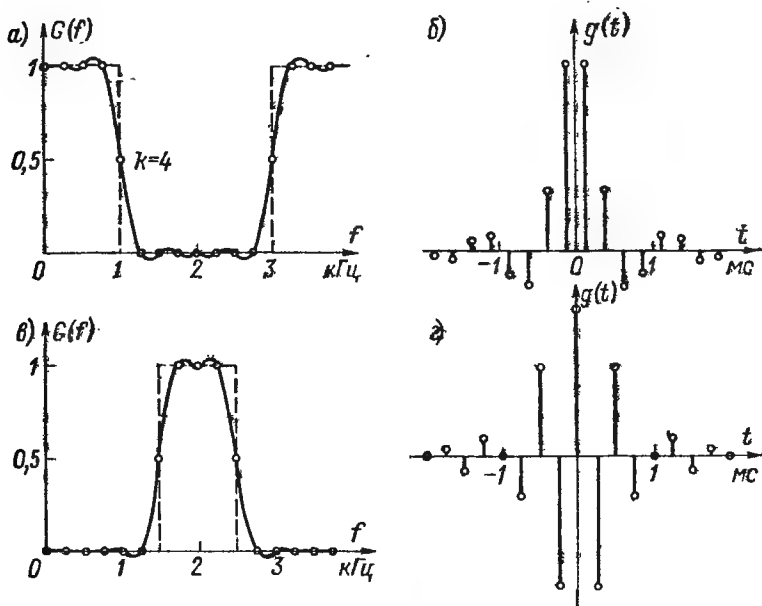


Рис. 59. Графики, поясняющие метод синтеза КИХ-фильтров, основанный на применении частотных выборок

числом импульсов N , то тогда нужно было бы применять одну из формул (107) или (111).

Применим в нашем случае формулу (105). Тогда

$$\begin{aligned}
 g(n) &= G(0) + 2 \sum_{k=1}^7 (-1)^k G(k) \cos \frac{\pi k (2n+1)}{16} = \\
 &= 1 - 2 \cos \frac{\pi (2n+1)}{16} + 2 \cos \frac{2\pi (2n+1)}{16} - \\
 &\quad - 2 \cos \frac{3\pi (2n+1)}{16} + \cos \frac{4\pi (2n+1)}{16},
 \end{aligned}$$

и мы получим $g(0) \div g(7) = -0,070; -0,215; 0,378; 0,580; -0,862; -1,323; 2,331; 7,179$ (рис. 59, б).

Частотная характеристика, соответствующая этой весовой функции, найденная по формуле (251), показана сплошной линией на рис. 59, а. Эта линия проходит через точки на идеальной частотной характеристике, которые мы использовали в качестве частотных выборок. В промежутках между этими точками ход реальной ЧХ описывается формулой (322).

Спроектируем теперь методом частотных выборок КИХ-фильтр верхних частот с полосой пропускания от 1,5 кГц до $f_2/2 = 2$ кГц. В качестве исходной берем идеальную частотную характеристику, показанную штриховой линией на рис. 59, в. Выберем $f_1 = f_2/16$. Тогда отсчеты идеальной ЧХ равны следующим значениям: $G(0) = \dots = G(5) = 0$; $G(6) = \dots = G(10) = 0,5$; $G(7) = G(8) = G(9) = 1$. Для нахождения весовых коэффициентов КИХ-фильтра можно воспользоваться формулами обратного дискретного преобразования Фурье (107) или (111). Именно для этих вариантов ДПФ обеспечивается четная симметрия отсчетов ЧХ относительно частоты $f_2/2$, что и требуется в случае фильтра верхних частот.

Выберем $T_2 = T_1/(N-1)$ и соответственно этому применим формулу (111). Тогда при $N = 17$ и учитывая значения частотных выборок, получим соотношение

$$g(n) = \cos \frac{2\pi \cdot 6n}{16} - 2 \cos \frac{2\pi \cdot 7n}{16} + (-1)^n.$$

По этому соотношению находим $g(0) \div g(8) = 0; 0,141; -0,414; 0,473; 0; -1,058; 2,414; -3,555; 4$ (рис. 59, г). Найденная по формуле (252) ЧХ для этого фильтра имеет вид, показанный на рис. 59, в сплошной линией. Как и в предыдущем примере, эта ЧХ проходит через точки, соответствующие использованным в расчете выборкам идеальной ЧХ, а в промежутках между этими точками ход ЧХ описывается формулой (322).

Кроме рассмотренных двух основных методов проектирования КИХ-фильтров существуют и другие, реже применяемые методы. В частности, в [24] описан метод проектирования КИХ-фильтров с минимизацией максимального отклонения реальной ЧХ от идеальной на всем интервале аппроксимации. Этот

метод базируется на реализации стандартных машинных процедур оптимизации, в том числе линейного программирования.

35. РАСЧЕТ ДИСКРЕТНЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ

Существует довольно много методов расчета дискретных БИХ-фильтров [24]. Большинство из них основывается на проектировании дискретного варианта соответствующего непрерывного фильтра (прототипа). Существуют также и прямые методы, когда сразу проектируется дискретный БИХ-фильтр. Мы рассмотрим два наиболее употребимых метода: инвариантного преобразования импульсной характеристики (ИХ) и билинейного преобразования. Оба этих метода — не прямые, они предполагают наличие непрерывного фильтра-прототипа.

Метод инвариантного преобразования ИХ предполагает расчет дискретного фильтра, ИХ которого представляет собой дискретизированную ИХ фильтра-прототипа. Дискретизация временной функции, как известно, приводит к тому, что спектр функции делается периодическим с периодом, равным частоте дискретизации. Поэтому при переходе от непрерывной ИХ к дискретной ИХ частотная характеристика фильтра начинает периодически повторяться со сдвигом, равным частоте дискретизации f_2 . Если частота f_2 установлена достаточно высокой в сравнении с характерными частотами ЧХ фильтра-прототипа, то тогда дискретный фильтр по своим свойствам будет соответствовать непрерывному фильтру-прототипу.

Предположим, что передаточная характеристика фильтра-прототипа представлена в виде суммы простых дробей

$$G(p) = \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{p + a_i}. \quad (323)$$

Этой передаточной характеристике соответствует ИХ, состоящая из суммы экспонент,

$$g(t) = \sum_{i=1}^m d_i e^{-a_i t}, \quad t \geq 0. \quad (324)$$

Дискретизированная ИХ $g(n)$ может быть найдена из непрерывной ИХ (324) подстановкой в нее вместо непрерывного времени t дискретного времени $t_n = nT_2$:

$$g(n) = \sum_{i=1}^m d_i e^{-a_i n T_2}, \quad n \geq 0. \quad (325)$$

Передаточная функция проектируемого дискретного фильтра — это Z -преобразование его дискретной ИХ (325):

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \left(\sum_{i=1}^m d_i e^{-a_i n T_2} \right). \quad (326)$$

Меняя в (326) порядок суммирования и находя сумму бесконечной геометрической прогрессии, получаем

$$G(z) = \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{1 - z^{-1} e^{-a_i T_2}}. \quad (327)$$

Таким образом, если известна передаточная функция непрерывного фильтра-прототипа, заданная в виде (323), то соответствующий дискретный фильтр будет иметь передаточную функцию (327). По найденной таким путем передаточной функции нетрудно составить схему дискретного БИХ-фильтра.

В § 20 и § 21 мы рассматривали варианты аппроксимации и схемы непрерывных БИХ-фильтров. В качестве типового звена полиномиальных фильтров низких частот было принято звено второго порядка, имеющее передачную функцию (164):

$$G(p) = \frac{c \cdot 4\pi^2 f_c^2}{p^2 + 2\pi p b f_c + c \cdot 4\pi^2 f_c^2}.$$

Как нетрудно показать, при использовании метода инвариантного преобразования ИХ такой передачной функции непрерывного фильтра будет соответствовать передачная функция дискретного фильтра, имеющая вид

$$G(z) = \frac{1 + b_1 + b_2}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}; \quad (328)$$

здесь

$$\begin{aligned} b_1 &= -2e^{-\pi b f_c T_2} \cos(\pi f_c T_2 \sqrt{4c - b^2}); \\ b_2 &= e^{-2\pi b f_c T_2}. \end{aligned} \quad (329)$$

Соотношение (328) нормировано так, чтобы для нулевой частоты фильтр имел единичный коэффициент передачи.

Для иллюстрации метода инвариантного преобразования ИХ рассчитаем дискретный ФНЧ, используя в качестве прототипа непрерывный фильтр Чебышева второго порядка с частотой среза f_2 , равной 1 кГц, и с пульсацией АЧХ в полосе пропускания, равной

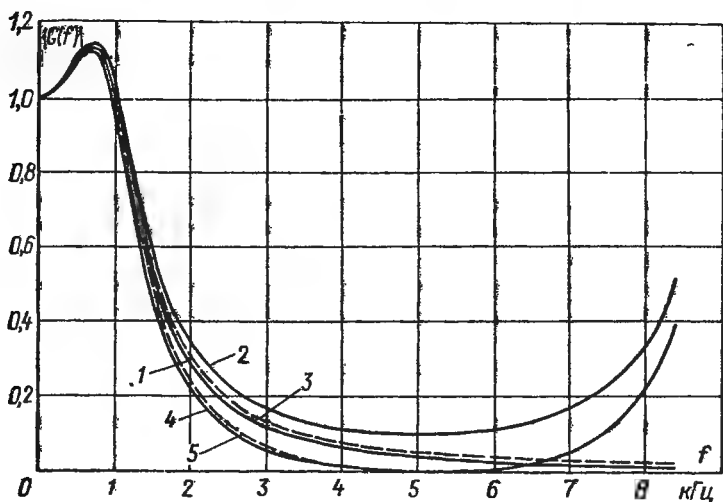


Рис. 60. Амплитудно-частотные характеристики фильтра-прототипа (1) и синтезированных БИХ-фильтров (2—5)

1 дБ. Для такого фильтра находим в табл. 3 значения $b = 1,0977$; $c = 1,1025$. Подставляя эти значения в (164) и переходя к модулю при $p = j2\pi f$, находим АЧХ непрерывного фильтра, которая показана кривой 1 на рис. 60. Определим теперь по формулам (329) коэффициенты b_1 и b_2 дискретного фильтра. Пусть интервал дискретизации T_2 будет равен 0,1 мс. Тогда получаем $b_1 = -1,1984$; $b_2 = 0,5017$. Используя эти значения, находим АЧХ дискретного фильтра как модуль передаточной функции (328) при подстановке в нее $z = e^{j\omega T_2}$. Эта АЧХ представлена кривой 2 на рис. 60.

Сравнивая кривые 1 и 2, видим, что наложение спектров, характерное для дискретного фильтра, приводит к ухудшению вида АЧХ фильтра в сравнении с фильтром-прототипом. Однако это ухудшение будет

тем меньше, чем больше отношение частоты дискретизации $f_2 = 1/T_2$ к частоте среза фильтра f_c . В данном случае $f_2/f_c = 10$. Если, например, выбрать $f_2/f_c = 20$, то тогда получим для дискретного фильтра АЧХ, представленную кривой 3 на рис. 60. Эта кривая заметно ближе к кривой 1 (АЧХ фильтра-прототипа), чем кривая 2.

Метод билинейного преобразования позволяет очень просто получить из передаточной функции $G(p)$ непрерывного фильтра-прототипа передаточную функцию $G(z)$ дискретного фильтра. Для этого достаточно сделать подстановку

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \frac{2}{T_2}. \quad (330)$$

Физический смысл этой подстановки следующий. Оператор p используемый в преобразовании Лапласа, — это символ дифференцирования. В дискретных системах в качестве приближенного значения производной можно использовать конечную разность

$$\frac{dx}{dt} \approx [x(n) - x(n-1)]/T_2.$$

Таким образом, выражению $pX(p)$ в преобразовании Лапласа можно в Z -преобразовании поставить в соответствие выражение $[(1 - z^{-1})/T_2]X(z)$. Однако, как показывает анализ [24], лучшие результаты при проектировании дискретных БИХ-фильтров дает замена непрерывной производной соотношением

$$\frac{x(n) - x(n-1)}{[x(n) + x(n-1)]/2} \frac{1}{T_2}.$$

Этому соотношению и соответствует билинейное преобразование (330).

В качестве примера рассчитаем методом билинейного преобразования дискретный фильтр, используя в качестве прототипа полиномиальный фильтр нижних частот второго порядка. Осуществляя в (164) подстановку (330), получаем

$$G(z) = \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) A}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}, \quad (331)$$

где

$$\begin{aligned} A &= cP^2/Q; & b_1 &= (2cP^2 - 2)/Q; & b_2 &= 1 - 2bP/Q; \\ P &= \pi f_c T_2; & Q &= 1 + bP + cP^2. \end{aligned} \quad (332)$$

Рассмотрим пример. Используем такие же, как и в предыдущем примере, значения $b = 1,0977$; $c = 1,1025$, характерные для фильтра Чебышева второго порядка с пульсацией АЧХ в полосе пропускания, равной 1 дБ. Примем $f_c = 1$ кГц, $T_2 = 0,1$ мс. Тогда с помощью соотношений (332) получим $A = 0,07485$; $b_1 = -1,2261$; $b_2 = 0,5255$. АЧХ рассчитанного таким образом дискретного БИХ-фильтра найдем, определяя модуль выражения (331) при подстановке $z = e^{j2\pi f T_2}$. Соответствующий график представлен кривой 4 на рис. 60 (кривая 1 на этом рисунке — это АЧХ непрерывного фильтра-прототипа).

Из сравнения АЧХ дискретного БИХ-фильтра, рассчитанного методом инвариантного преобразования ИХ (кривые 2 и 3 на рис. 60), и БИХ-фильтра, найденного методом билинейного преобразования (кривая 4), видно, что второй метод дает меньшие значения АЧХ в полосе заграждения. Это объясняется отсутствием здесь эффекта наложения спектров, характерного для метода инвариантного преобразования ИХ.

Вместе с тем сравнение кривых 1 и 4 на рис. 60 дает основание сделать вывод, что метод билинейного преобразования приводит к некоторому изменению масштаба по оси частот: у дискретного фильтра спад АЧХ наступает раньше, чем у непрерывного фильтра-прототипа. Соотношение между частотой f непрерывного фильтра и частотой f_d дискретного фильтра можно найти из равенства (330). Подставим в это равенство $p = j2\pi f$ и $z = e^{j2\pi f_d T_2}$. После преобразований получим

$$f = \frac{1}{\pi T_2} \operatorname{tg}(\pi f_d T_2). \quad (333)$$

Данное соотношение показывает, каким образом деформируется ЧХ фильтра-прототипа при проектировании дискретного фильтра методом билинейного преобразования.

Итак, метод инвариантного преобразования импульсной характеристики сохраняет масштаб графика АЧХ по горизонтальной оси (оси частот), но дает искажения по вертикальной оси вследствие эффекта наложения. Что же касается метода билинейного преобразования, то здесь картина обратная: по вертикальной оси график не искажается, но происходит

деформация графика по горизонтальной оси. Зная характер этой деформации, можно заранее внести соответствующие изменения в ЧХ фильтра-прототипа для того, чтобы получить желаемый результат.

В рассмотренном нами примере можно, в частности, таким путем добиться равенства частоты среза заданному значению. Если, например, мы хотим, чтобы частота среза дискретного фильтра равнялась $f_{с.д.}$, то тогда у фильтра-прототипа нужно принять частоту среза равной в соответствии с (333)

$$f_c = \frac{1}{\pi T_2} \operatorname{tg} (\pi f_{с.д.} T_2).$$

Пусть $f_{с.д.} = 1$ кГц, тогда при принятом в рассматриваемом примере значении $T_2 = 0,1$ мс получим $f_c = 1,0343$ кГц. Подставим это значение в (332) и найдем параметры передаточной функции (331): $A = 0,07902$; $b_1 = -1,1997$; $b_2 = 0,5157$. Кривая АЧХ для этого случая — это кривая 5 на рис. 60.

Частотные преобразования дискретных БИХ-фильтров — это преобразования, позволяющие по передаточной функции дискретного фильтра нижних частот найти передаточные функции других видов фильтров. Такие преобразования выполняются достаточно просто: вместо оператора z в передаточную функцию дискретного фильтра нижних частот подставляется соответствующее выражение. При этом могут выполняться следующие преобразования [20].

ФНЧ — ФНЧ. Если ФНЧ с частотой среза f_{c1} требуется преобразовать в ФНЧ с частотой среза f_{c2} , то можно использовать подстановку

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}; \quad \alpha = \frac{\sin [\pi T_2 (f_{c1} - f_{c2})]}{\sin [\pi T_2 (f_{c1} + f_{c2})]}.$$

ФНЧ — ФВЧ. ФНЧ с частотой среза f_{c1} преобразуется в ФВЧ с частотой среза f_{c2} с помощью подстановки

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}; \quad \alpha = - \frac{\cos [\pi T_2 (f_{c1} - f_{c2})]}{\cos [\pi T_2 (f_{c1} + f_{c2})]}.$$

ФНЧ — ФПП. Для преобразования ФНЧ с частотой среза f_c в полосно пропускающий фильтр с частотами среза (верхней и нижней) f_v и f_n рекомендуется

ПОДСТАНОВКА

$$z^{-1} \rightarrow - \frac{z^{-2} - 2 \frac{\alpha\beta}{\beta+1} z^{-1} + \frac{\beta-1}{\beta+1}}{\frac{\beta-1}{\beta+1} z^{-2} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1} z^{-1} + 1};$$

$$\alpha = \frac{\cos [\pi T_2 (f_B + f_H)]}{\cos [\pi T_2 (f_B - f_H)]}; \quad \beta = \frac{\operatorname{tg} (\pi T_2 f_c)}{\operatorname{tg} [\pi T_2 (f_B - f_H)]}.$$

ФНЧ — ФПЗ. Исходя из ФНЧ с частотой среза f_c можно получить полосно заграждающий фильтр с частотами среза (верхней и нижней) f_B и f_H с помощью подстановки

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta} z^{-1} + \frac{1-\beta}{1+\beta}}{\frac{1-\beta}{1+\beta} z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta} z^{-1} + 1};$$

$$\alpha = \frac{\cos [\pi T_2 (f_B - f_H)]}{\cos [\pi T_2 (f_B + f_H)]}; \quad \beta = \frac{\operatorname{tg} (\pi T_2 f_c)}{\operatorname{tg} [\pi T_2 (f_B - f_H)]}.$$

Применяя данные подстановки, можно преобразовать передаточные функции спроектированных выше дискретных ФНЧ в передаточные функции дискретных ФВЧ, ФПП, ФПЗ.

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.
2. Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
3. Вишенчук И. М. Выполнение операции усреднения в измерительных приборах методом весовых функций//Измерения, контроль, автоматизация. 1980. № 3, 4. С. 17—22.
4. Гехер К. Теория чувствительности и допусков электронных цепей. М.: Советское радио, 1973.
5. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов/С приложением работы Д. Кайзера «Цифровые фильтры». М.: Советское радио, 1973.
6. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов.— 4-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1986.
7. Гутников В. С. Интегральная электроника в измерительных устройствах. Л.: Энергоатомиздат, 1988.
8. Гутников В. С. Методы реализации специальных весовых функций в измерительных устройствах//Измерения, контроль, автоматизация. 1983. № 2. С. 3—15.
9. Гутников В. С. Применение гребенчатой весовой функции в интегрирующих АЦП//Изв. вузов. Приборостроение. 1982. № 1. С. 3—7.
10. Гутников В. С. Применение операционных усилителей в измерительной технике. Л.: Энергия, 1975.
11. Гутников В. С., Ковшов В. Д. Использование финитных весовых функций при реализации метода коммутационного инвертирования в измерительных системах//Измерительная техника. 1985. № 3. С. 38—39.
12. Гутников В. С., Руколайне А. В. Синтез весовых функций, увеличивающих помехоподавление интегрирующих измерительных преобразователей//Общие вопросы теории и проектирования аналоговых измерительных преобразователей: Тез. докл. Всесоюз. научн.-техн. конф. Ульяновск. 1978. С. 19—20.
13. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.
14. Джонсон Д., Джойсон Дж., Мур Г. Справочник по активным фильтрам. М.: Энергоатомиздат, 1983.
15. Зельдович Л. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972.
16. Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И. Введение в теорию сигналов и цепей: Учебное пособие для радиотехн. специальностей вузов. М.: Высшая школа, 1968.
17. Измеритель частоты и длительности периода с весовой обработкой/М. М. Мичурина, В. Г. Патюков, М. К. Чмых, С. В. Солдатов//Методы и аппаратура для измерения сдвига фаз:

Сб. научн. тр.//Ин-т физики СО АН СССР, Красноярск, 1980. С. 14—20.

18. Каппелини В., Константи́нидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.

19. Коган Ш. М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твердых телах//Успехи физических наук. Т. 145. 1985. Вып. 2. С. 285—328.

20. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры/Пер. с англ. М.: Мир, 1982.

21. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. Пер. с франц. М.: Мир, 1983.

22. Михотин В. Д., Чувькин Б. В., Шахов Э. К. Методы синтеза весовых функций для эффективной фильтрации измерительных сигналов//Измерения, контроль, автоматизация. 1981. № 5. С. 3—12.

23. Помехозащищенность и помехоустойчивость преобразования электрических измерительных сигналов/Д. Гернинг, М. М. Дорожовец, С. С. Обозовский и др.//Измерения, контроль, автоматизация. 1983. Вып. 4 (48). С. 20—29.

24. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов/Пер. с англ. М.: Мир, 1978.

25. Ребане Р. П., Тилинин А. И. О формировании весовых функций для обработки сигналов методом свертки//Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи: Тез. докл. республ. научн.-техн. конф., посвященной Дню радио. Таллинн. 1980. Эстонское Республ. правление НТО радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. С. 25—36.

26. Сибберг У. М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. М.: Мир, 1988.

27. Харкевич А. А. Спектры и анализ.— 4-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

28. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.

29. Хэррис Ф. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье//ТИИЭР, 1978. № 1. С. 60—67.

30. Чмых М. К. Весовой метод повышения точности и помехоустойчивости цифровых измерителей частоты//Автометрия. 1979. № 4. С. 135—137.

31. Чмых М. К. Повышение помехоустойчивости весовых методов обработки сигналов//Изв. вузов. Приборостроение. 1981. № 10. С. 7—11.

32. Шахов Э. К., Михотин В. Д. Интегрирующие развертывающие преобразователи напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1986.

33. Шевчук В. В. Способ уменьшения аддитивной погрешности в измерительных устройствах//Автометрия. 1978. № 4. С. 25—29.

34. Шумаров Е. В. Метод синтеза одноуровневых весовых функций, обеспечивающих высокое подавление сетевых помех//Автоматика и телемеханика. 1986. № 1. С. 162—168.

35. Шумаров Е. В., Попов В. С. Реализация ступенчатых весовых функций с высоким подавлением сетевых помех//Метрология. 1984 № 6. С. 21—28.

36. Gade S., Herlufsen H. Use of weighting functions in DFT/FFT analysis//Technical Review. 1987. N 3. P. 1—38. N 4. P. 1—42.

Предисловие	3
ГЛАВА ПЕРВАЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	6
1. Ряд Фурье	—
2. Интеграл Фурье и преобразование Лапласа	9
3. Основные свойства преобразования Фурье	11
ГЛАВА ВТОРАЯ. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СПЕКТРАХ	16
4. Что такое спектр?	—
5. Спектры некоторых простых сигналов	18
6. Соотношение спектров одиночного и периодического сигналов	26
7. Текущий спектр	31
ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР	34
8. Спектры энергии и мощности	—
9. Энергетический спектр случайного процесса	36
10. Соотношение между энергетическим спектром и корреляционной функцией случайного процесса	38
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. СПЕКТРЫ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГ- НАЛОВ	40
11. Влияние дискретизации на спектр сигнала	—
12. Теорема Котельникова	46
13. Дискретное преобразование Фурье	51
14. Основные свойства ДПФ	56
15. Быстрое преобразование Фурье	65
16. Z-преобразование	67
ГЛАВА ПЯТАЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙ- НЫМИ ЦЕПЯМИ И ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФИЛЬТ- РАХ	70
17. Преобразование детерминированного сигнала ли- нейной цепью	—

18. Преобразование стационарного эргодического случайного сигнала линейной цепью	80
19. Назначение и типы фильтров	92

ГЛАВА ШЕСТАЯ. АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ 86

20. Аппроксимация характеристик фильтров	—
21. Схемы активных фильтров	90
22. Расчет активных фильтров	94

ГЛАВА СЕДЬМАЯ. КИХ-ФИЛЬТРЫ, ПОДАВЛЯЮЩИЕ ПОМЕХИ С ЛИНЕЙЧАТЫМ СПЕКТРОМ 98

23. Общий подход к синтезу импульсных КИХ-фильтров, подавляющих периодическую помеху	—
24. Синтез помехоподавляющих ВФ путем применения циклотомических полиномов	105
25. Некоторые свойства помехоподавляющих ВФ	112
26. Равноамплитудные весовые функции	116

ГЛАВА ВОСЬМАЯ. УСРЕДНЯЮЩИЕ КИХ-ФИЛЬТРЫ 127

27. Усредняющие окна	—
28. Оптимальные усредняющие окна	135
29. Окна с целочисленными весовыми коэффициентами	143
30. Весовые функции для измерительных каналов с модуляцией-демодуляцией сигнала	146
31. Весовые функции, уменьшающие погрешности квантования цифровых частотомеров	154

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ И РАСЧЕТА ДИСКРЕТНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ ФИЛЬТРОВ 160

32. Реализация дискретных и импульсных КИХ-фильтров	—
33. Реализация дискретных и импульсных БИХ-фильтров	168
34. Расчет дискретных КИХ-фильтров	172
35. Расчет дискретных БИХ-фильтров	181

Список литературы	188
-------------------	-----

ВАЛЕНТИН СЕРГЕЕВИЧ ГУТНИКОВ

**ФИЛЬТРАЦИЯ
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ
СИГНАЛОВ**

Редактор Ю. В. Долгополова
Художник обложки В. В. Беляков
Художественный редактор Т. Ю. Теплицкая
Технический редактор Н. А. Минеева
Корректор Н. Б. Чухуткина

ИБ № 1802

Сдано в набор 20.11.89. Подписано в печать 24.05.90. М-30885. Формат 84×108¹/₃₂.
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать.
Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр.-отт. 10,29. Уч.-изд. л. 10,29. Тираж 14500 экз.
Заказ № 343. Цена 55 к.

Энергоатомиздат, Ленинградское отделение. 191065 Ленинград, Д-65, Мар-
сово поле, 1.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового
Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга»
им. Евгения Соколовой Государственного комитета СССР по печати.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.